第34卷第1期 西昌学院学报(自然科学版) Vol.34,No.1
2020年3月 Journal of Xichang University(Natural Science Edition) Mar.,2020

doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2020.01.008

基于PBL和CBT的Lusin定理的证明及其应用教学

赵江林,严　勇
(四川民族学院理工学院,四川 康定 626001)

摘要:研究了基于PBL和CBT的Lusin定理的证明及其应用教学。在实际教学过程中,通过构造问题,提出猜想,证明猜想形成Lusin定理,给出应用Lusin定理证明的例子,构建了Problem-driven-Conjecture-Theorem-Cases of applying theorem教学范畴。学生能更好地知道Lusin定理的来源,理解Lusin定理的结论及其推广结论,掌握Lusin定理证明的思想方法和技巧。

关键词: Lusin定理;可测函数;连续函数;教学
中图分类号:D174.1;G642.0　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1673-1891(2020)01-0038-03

Demonstration and Application Teaching of Lusin Theorem Based on PBL and CBT

ZHAO Jianglin, YAN Yong
(School of Science and Technology, Sichuan Minzu College, Kangding, Sichuan 626001, China)

Abstract: In this paper we focus on the demonstration and application teaching of Lusin Theorem based on PBL and CBT. In teaching of the course, by inventing problems, offering conjectures and proving them, we develop the Lusin theorem and present examples for applying Lusin theorem. We develop a new teaching mode of problem-driven-conjecture-theorem-cases of applying theorem, so that students can better understand the origin, conclusion and extension of Lusin theorem and grasp the idea, method and skill of applying Lusin theorem.

Keywords: Lusin theorem; measurable function; continuous function; teaching

0 引言

Lusin定理[1]是Littlewood三原则[2]中第二个,即"每个可测函数差不多是连续函数",揭露了可测函数与连续函数之间的关系,是实变函数的重要内容。在应用上,Lusin定理是架通可测函数和连续函数的桥梁,往往使得可测函数相关的问题归结为连续函数,从而使问题得以简化解决。另一方面,Lusin定理的证明方法很重要,先考虑简单函数,再考虑有界可测函数,最后,因一般可测函数具有一般性,在证明与可测函数相关的命题时是行之有效的办法[1]。故,学生理解、掌握、熟练应用Lusin定理有益于提高学生对实变函数理论理解和应用的整体感知和把握。关于Lusin定理的理论研究大多集中在高维推广和等价表示等方面[3-6],而教学研究很少。为此,在Lusin定理的实际教学过程中我们结合PBL(Problem-Based Learning)[7-8]和CBT(Case-Based Teaching)[9-13]教学方法,构造了新的教学模式:问题—猜想—结论—命题(Problem-driven-Conjecture-Theorem-Case of applying theorem)。

为了Problem-driven-Conjecture-Theorem-Case of applying theorem实现这一教学模式,我们对Lusin定理在教学中采取了如下步骤。首先,给出问题:一是可测集上的连续函数一定是可测函数,反之可测集上的可测函数一定是连续函数吗?不是,如狄利克雷函数是可测函数,但是处处不连续的函数;二是可测函数与连续函数有关系吗?考察闭区间$E=[0,1]$上的狄利克雷函数,我们能够得出结论,对任意的$0<\delta<1$,存在$F_\delta=E\cap \mathbb{Q}\subset E$,满足狄利克雷函数在$E\backslash F_\delta$上为连续函数,且$m(E\backslash F_\delta)=0\leqslant\delta$。这一结论对一般的可测函数是否成立?其次,我们在教学过程中调整了Lusin定理的位置,使其出现在依测度收敛概念的后面,便于直接给出Lusin定理应用的例子。同时我们补充了《实变函数与泛函分析基础》中Lusin定理证明过程中使用结论的证明

收稿日期:2019-09-20
基金项目:国家自然科学基金(114661058);四川民族学院数学分析示范课程(sfkc201701);四川民族学院"应用型转型背景下近世代数课程实践教学体系的构建与实践"教学改革项目(川民院发〔2019〕9号)。
作者简介:赵江林(1986—),男,四川巴中人,讲师,硕士,研究方向:生物动力系统。

并提前以引理的形式给出。这使得我们重点关注Lusin定理证明的思想方法,即关于可测函数相关的问题可从简单函数,有界可测函数,一般可测函数去思考问题。最后,我们给出了Lusin定理应用的两个例子,使学生熟悉Lusin定理和加深对Lusin定理的理解,使几乎处处有限的可测函数可以被连续函数逼近,几乎处处有限的可测函数为“差不多”有界的函数。

通过上面的教学步骤,针对Lusin定理,我们构建了问题—结论—应用的教学范畴,使得学生能够知道Lusin定理的来源,掌握Lusin定理证明的思想方法和技巧,加深升华理解Lusin定理的结论及其推广结论。

2 主要结果

引理1[1] 如果$E\subset\mathbb{R}^n$,是可测集,则对任意$\varepsilon>0$,存在开集$G\supset E$,满足$m(G\backslash E)<\varepsilon$。

证明 (i) 当$mE<\infty$,则由外测度的定义,对任意的$\varepsilon>0$,存在开区间列$\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$,满足$\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\supset E$且$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<mE+\varepsilon$。令$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$,则$G$为开集,$G\supset E$,且$mE\le mG\le\sum_{i=1}^{\infty}mI_i=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<mE+\varepsilon$。因此,$mG-mE<\varepsilon$,从而$m(G\backslash E)<\varepsilon$。

(ii) 当$mE=\infty$,则E为无界集。令$E_n=\{x\in\mathbb{R}^n|n-1\leqslant d(x,0)<n\}\cap E$,从而$E_n$,$n\in\mathbb{Z}_+$为有界可测集,$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$且$E_i\cap E_j=\varnothing$,$i\neq j$,$i,j=1,2,...$。应用(i)的结论,则对每一$n\in\mathbb{Z}_+$和任意的$\varepsilon>0$,存在开集$G_n\supset E_n$,满足$m(G_n\backslash E_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$。令$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$,则$G$为开集,$G\supset E$且$G-E=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n-E_n)$。因此,

$$m(G\backslash E)\le\sum_{n=1}^{\infty}m(G_n\backslash E_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon。$$

引理2 如果$E\subset\mathbb{R}^n$是可测集,则对任意$\varepsilon>0$,存在闭集$F\subset E$,满足$m(E\backslash F)<\varepsilon$。

证明 考虑E^c,则由引理1知,存在开集$G\supset E^c$且$m(G\backslash E^c)<\varepsilon$。取$F=G^c$则$F$为闭集,$F\subset E$且。$E/F=E\cap F^c=E\cap G=G\cap E=G\backslash E^c$因此,$m(E\backslash F)<\varepsilon$。

引理3 如果$F_1,F_2,\cdots,F_k\subset\mathbb{R}^n$为互不相交的闭集,$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\chi_{F_i}(x)$,则$\varphi$为$F=\bigcup_{i=1}^{k}F_i$上的连续函数。

证明 当$k=1$时,$\varphi(x)=c$,$x\in F$,从而φ为F上的连续函数。当$k=2$时,则存在互不相交的开集G_1,G_2满足$G_1\supset F_1$,$G_2\supset F_2$。因此,对任意的$x_0\in F=F_1\cup F_2$,不妨设$x_0\in F_1\subset G_1$,从而存在$\mathrm{U}(x_0,\delta)\subset G_1$。假设$V$是$c_1$的任一领域,故$\varphi(U\cap F)=c_1\in V$。$\varphi$为$F$上的连续函数,对任意$x_0\in F=\bigcup_{i=1}^{k}F_i$,不妨设$x_0\in F_j(1\leqslant j\leqslant k)$。令$F_0=\bigcup_{i\neq j}F_i$,则$F_0$为闭集且$F_0\cap F_j\neq\varnothing$,因此,$\varphi$为$F$上的连续函数。

引理4 如果g是E上的实连续函数,f是$\mathbb{R}$上的连续函数,则$f\circ g$是E上的连续函数。

证明 任取$x_0\in E$,则$f(g(x_0))\in\mathbb{R}$。由f是$\mathbb{R}$上的连续函数可知存在$W(g(x_0),\delta')$,满足$f(W)\subset V(f(g(x_0)),\varepsilon)$。因为$g$是$E$上的实连续函数,对$W(g(x_0),\delta')$,存在$U(x_0,\delta)$,满足$g(U\cap E)\subset W$,从而$f(g(U\cap E))\subset V$。故$f\circ g$是$E$上的连续函数。

定理1 (Lusin定理[1]) 如果$E\subset\mathbb{R}^n$是可测集,f为E上几乎处处有限的可测函数,则对任意的$\delta>0$,存在闭子集$F_\delta\subset E$,满足f在F_δ上连续且$m(E\backslash F_\delta)<\delta$。

证明 (i)当f为简单函数时,设$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$,各E_i可测互不相交且$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)$,$x\in E$。对于$\delta>0$,由于$E_i$是可测集,根据引理2,存在闭子集$F_i\subset E_i$且$m(E_i\backslash F_i)<\frac{\delta}{n}$,$i=1,2,\cdots,n$。令$F_\delta=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$,则$F_\delta$为闭集,且$m(E\backslash F_\delta)=m(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\backslash\bigcup_{i=1}^{n}F_i)\le m(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\backslash F_i)\le\sum_{i=1}^{n}m(E_i\backslash F_i)<\delta$。

根据引理3,f在F_δ上连续。

(ii)当f为E上的有界可测函数时,则由简单函数与可测函数之间的关系可知存在简单函数列$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$使得$\varphi_k$在上一致收敛于$f$。由(i)可得,存在闭集$F_k\subset E$,$m(E\backslash F_k)<\frac{\delta}{2^k}$,且$\varphi_k$在$F_k$上连续。令$F_\delta=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$,则$F_\delta$为闭集,且$m(E\backslash F_\delta)=m(E\backslash\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k)=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\backslash F_k))\le\sum_{k=1}^{\infty}m(E\backslash F_k)<\delta$。

由于$\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$在$F_\delta$上连续且一致收敛于$f$,故$f$在$F_\delta$上连续。

(iii) 当f为一般的可测函数时,令$E_0=E(|f|=\infty)$,则$mE_0=0$。设$g(x)=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}$,$x\in E\backslash E_0$,则$g$是$E\backslash E_0$上的有界可测函数。由(ii)可得,存在闭集$F_\delta\subset E\backslash E_0\subset E$,满足$m(E\backslash F_\delta)=m(E\backslash F_\delta)-m(E_0)=m(E\backslash F_\delta\backslash E_0)=m(E\backslash E_0\backslash F_\delta)<\delta$,$g$在$F_\delta$上连续。

因为$h(x)=\frac{x}{1-x}$为$(-1,1)$上的连续函数则由引理4知,$f(x)=h(g(x))$为F_δ上连续函数且$m(E\backslash F_\delta)<\delta$。

3 Lusin定理的应用

命题1[1] 如果$E \subset \mathbb{R}$，f是E上几乎处处有限的可测函数，则存在$\mathbb{R}$上的一列连续函数 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$使得 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$几乎处处于$E$。

证明由Lusin定理可知，对$n \in \mathbb{Z}_+$有可测子集$E_n \subset E$，$\mathbb{R}$上的连续函数g_n，满足$g_n(x) = f(x)$，$x \in E_\delta$和$m(E \backslash E_n) < \frac{1}{n}$。因此，对任意$\eta > 0$有$E(|f - g_n| \geq \eta) \subset E \backslash E_n$，$mE(|f - g_n| \geq \eta) \leqslant (E \backslash E_n) < \frac{1}{n}$。故$\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f - g_n| \geq \eta) = 0$，即在$E$上$g_n \Rightarrow f$。由里斯定理存在$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列$\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，满足$\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(x) = f(x)$几乎处处于$E$。

命题2[1] 如果$mE < \infty$，$f(x)$是E上几乎处处有限的可测函数，则对任意$\delta > 0$，存在$F_\delta \subset E$和$M > 0$，使得$m(E \backslash F_\delta) < \delta$且$|f(x)| \leqslant M$，$x \in F_\delta$。

证明由Lusin定理知，对任意$\delta > 0$，存在闭集$F_\delta \subset E$，满足f在F_δ上连续且$m(E \backslash F_\delta) < \delta$。由连续函数在闭集上必有界知，存在$M > 0$满足，$|f(x)| \leqslant M$，$x \in F_\delta$。

4 结语

通过在教学过程中调整Lusin定理的位置，使其出现在依测度收敛概念之后，教学上就能够马上给出Lusin定理的应用即命题1和命题2，并用命题1进一步阐述可测函数与连续函数之间的关系即每一个可测函数都能找到一列连续函数使得这列连续函数的极限函数为该可测函数。值得注意的是命题1本身也给出了把可测函数相关问题转化为连续函数问题的具体方法即考虑存在一列连续函数$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$几乎处处成立。而命题2实际上是对可测函数更深入的认识，即有限测度上的几乎处处有限可测函数为差不多有界函数。通过定理-命题的模式能够激发学生去思考可测函数更多的“差不多”性质[1]，促使学生探索；另一方面，引理的补充对于初学实变函数内容的学生来说，更易于理解、掌握Lusin定理的内容。通过在实际教学过程中实施Problem-driven-Conjecture-Theorem-Case of applying theorem的教学改革，我们通过课堂提问、课后习题和期末考题答卷情况发现学生能够更容易清楚Lusin定理的背景来源，掌握Lusin定理证明的思想方法和技巧，加深理解Lusin定理的结论及其推广结论。

参考文献：

[1] 程其襄,张奠宙,魏国强,等.实变函数与泛函分析基础[M].3版.北京：高等教育出版社,2010.

[2] ELIAS M. S.,RAMI S.Real analysis：measure theory, integration, and Hilbert spaces[M].Princeton:Princeton University Press,2004.

[3] 李清煜.鲁金定理的证明及推广[J].高等继续教育学报,1994(6):40-41.

[4] 查莉分.鲁金定理的一个简单证明[J].四川师范大学学报(自然科学版), 1989(2):97-98.

[5] 戚民驹.鲁金定理与可测函数的本性定理[J].上海电机学院学报,2009, 12(3):240-242.

[6] 吴鸿儒,赵焕光.关于可测函数中几个著名定理的等价性[J],浙江师范学院学报(自然科学版), 1986(1):76-79.

[7] 程欣泉.大学体育俱乐部实施PBL教学模式的探究与实践[J].西昌学院学报(自然科学版),2016,30(3):126-129+144.

[8] 牛丽丽,何忠,周红萍,等.PBL教学模式在体育社会学课程中的应用调查[J].西昌学院学报(自然科学版),2012,26(1):111-114.

[9] 李宝萍.高等数学案例教学法的研究[J].西昌学院学报(自然科学版),2013,27(4):145-147.

[10] 周继芳,王光昶,陈涛,等.案例教学法在《医用物理学》教学中的应用[J].西昌学院学报(自然科学版),2008,22(4):154-156.

[11] 蒋磊.案例教学法在动物解剖学教学中的实践[J].西昌学院学报(自然科学版),2016,30(3):109-112.

[12] 任跃斌.案例教学法在电子商务专业《电子商务法》课程教学中的应用[J].西昌学院学报(自然科学版),2010,24(3):143-146.

[13] 张婷,王光昶,陈涛,等.“振动和波”的案例式教学法[J].西昌学院学报(自然科学版),2009,23(2):135-137.

（责任编辑：曲继鹏）