doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2019.01.029

从高考数学谈高等数学与初等数学结合教学的必要性

张　艳,阿力非日
(西昌学院彝语言文化学院,四川 西昌 615022)

摘要:高考是高等院校选拔人才的重要手段,其考试大纲和要求对中学教育起着引导作用,同时也对高等教育具有一定的启示作用。通过2018年四川高考数学一道题的解法和考生作答情况,对数学教育的现状和存在的问题进行分析,从而提出高等数学与初等数学结合的必要性和重要性。

关键词:高考; 数学教育; 高初结合
中图分类号:G633.6　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1673-1891(2019)01-0117-04

On the Necessity of Combining Higher and Elementary Maths Educations Based on Study of College Entrance Examination of Maths

ZHANG Yan, Ali Feiri
(School of Yi Language and Culture, Xichang University, Xichang, Sichuan 615022, China)

Abstract: College entrance examination is an important means for colleges and universities to select talents. Its examination syllabuses and requirements serve as guidelines for middle school education and also as indicators for higher education. In this paper I made an analysis of the current situation and problems of maths education by discussing the solution to a math question in 2018 Sichuan College Entrance Examination and students' performances on that question, so as to confirm the necessity of combining higher and elementary math educations.

Keywords: college entrance examination; maths education; combination of higher and elementary educations

0 引言

2018年高考数学全国统一考试大纲指出:数学科的命题,在考查基础知识的基础上,注重对数学思想方法上的考查,注重对数学能力的考查,展现数学的科学价值和人文价值,同时兼顾试题的基础性、综合性和应用性,重视试题间的层次性,合理调控综合程度,坚持多角度、多层次的考查,努力实现全面考查综合数学素养的要求[1]。依据这一目标,作者发现在2018年四川省高考数学(理科)试卷中有一道题值得数学教育工作者思考。

1 问题的提出

2018年高考数学全国卷Ⅲ第21题(12分):

已知函数$f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$。

(1)若$a=0$,证明:当$-1<x<0$时,$f(x)<0$;当$x>0$时,$f(x)>0$;

(2)若$x=0$是$f(x)$的极大值点,求a。

(1)方法一:当$a=0$时,$f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$

$f'(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}$ ………………… 2分

设函数$g(x)=f'(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{x+1}$,

则$g'(x)>\dfrac{x}{(x+1)^2}$ ……………………… 3分

当$-1<x<0$时,$g'(x)>0$,当$x>0$时,$g(x)>0$。故当$x>-1$时,$g(x)\geqslant g(0)=0$。

且仅当$x=0$时,$g(0)=0$,从而$f'(x)\geqslant 0$且仅当$x=0$时,$f(x)=0$………………………………… 4分

所以$f(x)$在$(-1,+\infty)$上为增函数,又$f(x)=0$,故结论成立。 ………………………………… 5分

该题第一问比较简单,主要考查两个层次的知识:一是导数的基本概念、求导公式和求导的基本法则;二是导数的简单应用(单调性和极值等)。解法有如上的两种,当$a=0$时,含参数的函数变成了不含参数,通过高中的导数部分知识学习一般可以

收稿日期:2018-10-19
基金项目:四川省教育厅人文社科重点研究基地"彝族文化研究中心"项目:民俗数学在彝族基础教育中的实践运用研究(YZWH1832)。
作者简介:张艳(1988—),女,四川广安人,助教,硕士,研究方向:数学教育和非线性分析。

解决,因此中等成绩以上的学生基本可以拿满分6分。但对于导数基础知识掌握较差的学生,大多只能求出$f'(x)$拿到2分,或者再进一步求出$f''(x)$拿到3分。第二种方法用到了转化函数的思想,学生一般不容易想到,转化显得复杂且没那么必要,在完成第一问的学生中,99%以上采用了第一种方法。

第二问有四种解法,均用到了高等数学中的数学思想方法。

方法一:定理(极值的第三充分条件)

设f在x_0的某邻域内存在直n-1阶导数,在x_0处n阶可导,且$f^k(x_0)=0$

(k=1,2,⋯,n-1),且$f^n(x_0)\neq 0$则

(i)当n为偶数时,f在x_0取得极值,且当$f^k(x_0)<0$时取得极小值。

(i)当n为奇数时,f在x_0不取极值。

该内容是对高等数学对中学数学极值问题的延伸和补充,在高中数学导数内容部分涉及的较少。从高考生作答的情况来看,绝大多数的学生没有这方面的知识储备,导致无法系统完整地完成该题。但有些老师有所补充,对于大部分的学校大多老师没有教授关于高阶导数的相关知识和系统的极值理论,他们中多数停留在课本上所涉及到的基础知识:导数的基本概念、求导公式、求导法则、用一阶导数解决极值和单调性等相关问题,这就导致第二问的得分严重偏低。

设f在x_0的某邻域内存在址到n阶导数,在x_0处n阶可导且

$$f'(x)=\frac{1+ax^2}{1+x}+(1+2ax)\ln(1+x)-1$$

$$f''(x)=\frac{1+4ax}{1+x}-\frac{1+ax^2}{(1+x)^2}+2a\ln(1+x)$$

$$f'''(x)=\frac{6a}{1+x}-\frac{1+6ax}{(1+x)^2}+\frac{2(1+ax^2)}{(1+x)^3}=\frac{2ax^2+(6a-1)x+6a+1}{(1+x)^3} \quad 2分$$

且$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=6a+1$ …………… 3分

若$6a+1>0$,且$f'''(0)$在0的附近大于0,$f''(x)$在0附近单调递增,由$f''(0)=0$知$f''(x)$在0的左侧附近小于0,在0的右侧附近大于0,即$f'(0)=0$知$f'(x)$在0的附近大于0,即$f(x)$在0的附近单调递增即0不是$f(x)$的极大值点。

同理:若$6a+1<0$,0不是极大值点。 …… 5分

若$6a+1=0$,则$f'''(x)=\dfrac{-\frac{1}{3}x^2-2x}{(1+x)^3}$,则当$x\in$(-1,0)时,$f''(x)>0$。当$x\in(0,1)$时,$f''(x)<0$类似于以上的讨论可知$x=0$为$f(x)$的极大值点。⋯ 6分

综上:$a=-\frac{1}{6}$ …………………………… 7分

根据解法分析:结合高等数学的极值定理,这题的解决将毫无难度,掌握求导基本运算能力的中等以上考生或可拿满分。

方法二:(洛必达法则)该解法运用洛必达法则和极限相关性质。

解法如下:

$$f'(x)=\frac{1+ax^2}{1+x}+(1+2ax)\ln(1+x)-1$$

$$f''(x)=\frac{1+4ax}{1+x}-\frac{1+ax^2}{(1+x)^2}+2a\ln(1+x)$$

因为$f(0)=f'(0)=0$,$f(x)$要达到极大,在0的附近应满足$f''(x)<0$……………………………… 2分

整理得:$a[2(1+x)^2\ln(1+x)+3x^2+4x]\leqslant -x$ … 3分

当$x<0$时,$a\geq\dfrac{-x}{2(1+x)^2\ln(1+x)+3x^2+4x}$,由洛必达法则:$a\geq-\frac{1}{6}$ …………………………… 4分

当$x>0$时,$a\leq\dfrac{-x}{2(1+x)^2\ln(1+x)+3x^2+4x}$,由洛必达法则:$a\leq-\frac{1}{6}$ …………………………… 5分

因此:$a=-\frac{1}{6}$

如果$6a+1=0$,类似于解1或解2中的讨论可知$x=0$是$f(x)$的极大值点。 …………………… 6分

综上:$a=-\frac{1}{6}$ ………………………………… 7分

方法三:(与方法二类似)

当$x=0$时是$f(x)$的极大值点,在$x=0$附近有$f(x)<0$ ………………………………………… 1分

当$x<0$时,$a>\dfrac{2x-(2+x)\ln(1+x)}{x^2\ln(1+x)}$ …… 2分

由洛必达法则有$a\geq\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x-(2+x)\ln(1+x)}{x^2\ln(1+x)}=-\dfrac{1}{6}$

………………………………………………… 3分

当$x>0$时,$a<\dfrac{2x-(2+x)\ln(1+x)}{x^2\ln(1+x)}$ …… 4分

由洛必达法则有$a\leq\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2x-(2+x)\ln(1+x)}{x^2\ln(1+x)}=-\dfrac{1}{6}$

………………………………………………… 5分

因此$a=-\frac{1}{6}$

如果$a=-\frac{1}{6}$类似于解1或解2中的讨论知$x=0$是$f(x)$的极大值点。 ……………………………… 6分

综上:$a=-\frac{1}{6}$ …………………………………… 7分

用洛必达法则解决该问题也显得比较简易,但高考生中使用的人很少,说明学生对此法知之甚少。

方法四:

设函数$\varphi(x)=\frac{f(x)}{2+x+ax^2}=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x+ax^2}$

由于$2+x+ax^2$在0的附近大于0。故$\varphi(x)$与$f(x)$在0附近同号。

又$\varphi(0)=f(0)=0$是$f(x)$的极大值点,当且仅当$x=0$是$\varphi(x)$的极大值点。……………………… 2分

$$\varphi'(x)=\frac{x^2(a^2x^2+4ax+6a+1)}{(x+1)(2+x+ax^2)^2}$$ ………… 3分

如果$6a+1>0$,则$\varphi'(x)$在0附近大于0。故$x=0$不是$\varphi(x)$的极大值点。

如果$6a+1<0$,则$a^2x^2+4ax+6a+1=0$有正负根各一个。故x在0的附近时,$\varphi'(x)<0$。

所以$x=0$不是$\varphi(x)$的极大值点。 ……… 5分

如果$6a+1=0$,则$\varphi'(x)=\frac{x^3(x-24)}{(x+1)(x^2-6x-12)^2}$

当$x\in(-1,0)$时,$\varphi'(x)>0$,当$x\in(0,1)$时,$\varphi'(x)<0$。所以$x=0$是$\varphi(x)$的极大值点。

从而$x=0$是$f(x)$的极大值点。…………… 6分

综上:$a=-\frac{1}{6}$ …………………………… 7分

从今年四川省考生答题情况来看,高中阶段的学生推理论证、知识迁移能力薄弱、数学思想方法不够了解以及数学视野不够开阔。解题思路套路化、模式化的现象比较严重,知识面太过局限。由此促使我们对当前的中学数学和大学数学教育做出一些思考,强调高初结合的必要性。

2 数学教育的现状

2.1 中学数学教育现状

当前的中学数学教育为了与高考接轨,一切教学活动均以高考为范本,过分强调"高考考什么学生就学什么",从而忽视了知识的整体性和系统性,忽视了知识的来龙去脉,忽视了数学思维方式的培养和数学文化的渗透,应试教育思想严重。因而并没有把数学当成一门学科来教学,课堂上有的老师过分强调定义、定理、法则和公式的灌输和记忆,并不注重这些知识的发生发展及应用过程的揭示与解释,注重"是什么"而不注重阐述"为什么",在解决具体问题中强调一招一式的定式套路,而不善于将所讲所学知识中所蕴含的丰富的数学思维训练因素和数学思想方法挖掘和抽象出来,训练和培养学生形成系统的知识和数学思维方式。这样的教育方式容易将学生的思维僵化,过于注重套路而削弱了创新和思考的能力。

另外,新课改后中学数学内容分为必修和选修两个部分,其中加入了一些微积分和概率统计的知识,但很多老师对这些以往中学阶段不要求的内容掌握得不够透彻,导致在教学过程中会人为地降低教和学的要求。因此组织和加强中学教师的继续教育也是刻不容缓的。

从上述的考题来看,高校对于人才的选拔已不再止步于要求学生对中学数学知识的掌握和运用,不再是一成不变的,而是对高等数学思维的培养、高等数学基本方法有了一定的新要求,从而为进入大学继续学习高等数学知识打下基础,也对中学数学教育提出了新的要求。

2.2 高等数学教育现状

一方面,受中学数学教育的影响,大学数学教育在实践中存在非常大的问题。根据作者几年的高等数学教学经验,结合在校大学生的数学学习概况,不只是文科生,理科生的数学基础和能力也成逐年减弱的趋势。数学基本素养堪忧:必备基础知识弱化、数学思维僵化、数学文化知识缺乏等,这些无疑都成为了高等数学教和学的障碍。比如中学数学中对极限知识的弱化,导致大学生在开始进入高等数学学习时感觉困难,但极限又是微积分的基础;再如中学在讲三角函数时只涉及到正弦函数、余弦函数和正切函数,而高等数学则要求学生还需要具有余切、正割和余割函数以及反三角函数等相关知识基础;中学不等式难度下降又被列为选修内容,但高等多处都将用到不等式相关知识等等,这些都将影响学生进入大学后对高等数学的学习。

另一方面,高考压力下的素质教育仍然强调教材和题海,导致学生的自学能力和自觉意识较差,数学视野狭窄。进入大学后,没有了升学的压力,考试压力也大大减小,学习数学的没有了目标性,加之高等数学知识复杂抽象,许多学生感觉兴趣降低,学习吃力甚至直接放弃学习。再者高校数学专业的师范生进入了认知上的误区:教中学不需要掌握高等数学的知识,整天被学习无用论包裹。这些无疑都给高等数学教学的开展造成了很大困难。

以上两方面的原因归根结底是高等数学与初等数学教学的脱节。为了解决这一问题,现在的教材一方面把大学数学的一些内容编到高中教材中,

如微积分和概率统计;另一方面在大学教材中增加一些形象的示例,加强与初等数学的联系,如芝诺悖论和割圆术等,并开设像《初等几何研究》《初等代数研究》等这类的与中学数学知识联系密切的课程,为实现高初结合打下基础。

3 高初结合的方法及意义

3.1 以传授知识为载体,关注数学思维能力和数学素养的养成

李大潜院士说:"数学素养不可能凭空出现,它是在数学知识的传授过程中逐步熏陶而来的,任何认为抓素质教育就可以离开或削弱数学知识传授的做法和想法都是错误的。"[2]数学思维能力是一种自成体系的独特思维方式,主要包括逻辑推理能力和抽象概括能力,数学素养则是数学知识、数学思想和数学能力的综合体现。

在中学阶段,教师或许并未关注数学思维能力和数学素养的培养,只关注知识的传授和如何应对高考的策略。因此不管是中学数学老师还是大学数学教师都应该在数学知识的传递过程中注重思维的严密性和逻辑性培养,讲清知识的来龙去脉,并且对其进行严密的逻辑推理,让学生清楚所学知识的发生发展过程。特别是在概念和定理公式的教学过程中应强调推理过程、理解记忆而不是死记硬背。

3.2 以数学师范教育为手段,关注数学教师的能力提升

所话说:"要给学生一碗水,教师得有一桶水",由此可以看出教师自身的知识水平和教学能力对学生的影响,因此加强中学数学教师的能力提升尤为重要。一方面,高等院校应利用假期定期举办中学数学教师培训,加强高等教育与中学教育的联系,用高观点指导中学数学教学;另一方面,高等院校应加强数学师范专业学生的数学知识和师范技能的培养,在教育过程中有针对地结合中学数学改革的具体情况来加强教学,加强高等师范院校对中学数学教育的指导与联系,避免师范生所学内容与中学教学实践严重脱节。

3.3 以数学史为媒介,关注学生学习兴趣的培养

有调查表明,学生一般都欠缺数学学习的兴趣(最喜欢数学的学生仅占25.6%),较多学生对数学学习难以形成愉快的情感体验;随着年级的升高,学生愉快的体验大幅下降(从小学四年级上学期的72%以上,下降至初中毕业班的27%);随着知识的获取和能力的发展,学生在数学学习上的自尊和自信却逐渐消解,学生对数学学习的回忆比较多是失败的经历和不满意的成绩。因此教师在教学过程重适当融入数学史、数学家及相关数学小故事的内容以使学生产生浓厚的学习兴趣,有利于数学知识的接受、吸收和消化,同时也有利于学生对数学文化的全面了解和掌握。

4 结语

从上面的考题可以看出,以高等数学视角命题高考数学,给中学数学教学注入了新的活力,同时也给中学数学教师和高等数学教育提出了新的要求,因此在数学教育中加强高初结合具有一定的现实意义。

参考文献:

[1] 教育部考试中心. 2018年普通高等学校招生全国统一考试大纲[M].北京:高等教育出版社,2018.

[2] 周元.着重培养年轻人 争取10年建成数学强国[N].海南日报(A3),2010(12):24

[3] 郑婷婷. 由一道高考数学题来看中学数学与大学数学衔接问题[J].大学数学,2012,28(6):139-141.

[4] 金月波. 由高考阅卷引发的数学教育思考[J]. 琼州学院学报,2011,18(2):109-112.

[5] 龙宪军,彭再云,龚高华. 例析高等数学背景下的高考数学试题[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2013,30(12):31-33.

(责任编辑:曲继鹏)