doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2018.04.013

一道考研数学试题的多种解法

崔静静,赵思林*
(内江师范学院数学与信息科学学院 641112)

摘要:发散思维是创新思维的最主要特点,一题多解能够培养学生的发散思维能力。利用凑微分法、分部积分法、换元法等给出了2018年全国硕士研究生入学考试一道数学试题的6种解法。以此引导学生深入地探索问题,培养学生的创造性思维能力。

关键词:考研试题;一题多解;换元法;不定积分
中图分类号:O172.2　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1673-1891(2018)04-0054-03

Multiple Solutions to a Math Problem in the Postgraduate Entrance Examination

CUI Jing-jing, ZHAO Si-lin*
(School of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang, Sichuan 641112)

Abstract: Divergent thinking is innovative thinking's main characteristic, one problem with multiple solutions can cultivate students' divergent thinking ability. Using the improvising differentiation, integration by parts, and integration by substitution, there are six methods to a math problem in 2018 Postgraduate Entrance Examination. Thus this paper hopes to lead students to explore problems more deeply and cultivate students' creative thinking ability.

Keywords: Postgraduate Entrance Examination; one question with multiple solutions; integration by substitution; indefinite integral

发散思维是创造性思维的最主要的特点,是测定创造力的主要标志之一。一题多解能够培养学生的发散思维能力,引导学生深入地探索问题,培养学生灵活多变处理问题的能力[1]。本文介绍2018年全国硕士研究生入学考试一道数学试题的6种解法,作为一题多解的一个实例,仅供参考。原题如下:

例(2018年数学一,二第15题) 求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx$ 。

方法1(教育部考试中心参考答案)

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}\,de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

又 $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}de^x$

$$=\int\sqrt{e^x-1}\,de^x+\int\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{2}{3}(e^x-1)\sqrt{e^x-1}+2\sqrt{e^x-1}+C\ ,$$

所以 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x+2)\sqrt{e^x-1}+C$ 。

评析:方法1属于常规方法,可用凑微分法(第一类换元积分法),将原式变为 $\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}\,de^{2x}$,然后考虑用分部积分。用观察法可得 $e^x=(\sqrt{e^x-1})^2+1$,从而将 $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}de^x$ 裂项,变为 $\int\sqrt{e^x-1}\,de^x+\int\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$ 是考查考生的一个分水岭,此处看似简单,对学生的思维要求极高。

方法2

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}\,de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}[e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\int e^{2x}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{1+e^x-1}dx]$$

收稿日期:2018-01-23
基金项目:教育部"本科教学工程"四川省地方属高校本科专业综合改革试点项目——内江师范学院数学与应用数学"专业综合改革试点"项目(ZG0464);四川省"西部卓越中学数学教师协同培养计划"项目(ZY16001),内江师范学院2016年度校级学科建设特色培育项目(T160009,T160010,T160011)。
作者简介:崔静静(1993—),女,四川德昌人,硕士研究生,研究方向:数学教育研究;*为通讯作者。

$$=\frac{1}{2}[e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}e^x\mathrm{d}\sqrt{e^x-1}]$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}[e^x\cdot\sqrt{e^x-1}-\int\sqrt{e^x-1}\cdot e^x\mathrm{d}x]$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}e^x\cdot\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{2}\int\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}(e^x-1)]$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}e^x\cdot\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}e^x\cdot\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x+2)\sqrt{(e^x-1)}+C$$

评析:方法2与方法1一脉相承。可将原式化为 $\frac{1}{2}[e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}e^x\mathrm{d}\sqrt{e^x-1}]$,再次使用分部积分法。相比方法1,更多考生选择后者。

方法3

令 $t=e^x-1$,则 $x=\ln(t+1)$,所以 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$

所以原式

$$=\int(1+t)^2\arctan\sqrt{t}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$=\int(1+t)\arctan\sqrt{t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{t}\mathrm{d}(1+t)^2$$
$$=\frac{1}{2}(1+t)^2\cdot\arctan\sqrt{t}-\frac{1}{2}\int(1+t)^2\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}(1+t)^2\cdot\arctan\sqrt{t}-\frac{1}{4}\int(1+t)\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}(1+t)^2\cdot\arctan\sqrt{t}-\frac{1}{4}[\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}(1+t)^2\cdot\arctan\sqrt{t}-\frac{1}{4}[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{-\frac{1}{2}}]+C$$
$$=\frac{1}{2}(1+t)^2\cdot\arctan\sqrt{t}-\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}+C\ ,$$

由 $t=e^x-1$,则上式

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(e^x-1)^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x+2)(e^x-1)^{\frac{1}{2}}+C$$

方法4

令 $t=\sqrt{e^x-1}$,则 $e^x=t^2+1$,

所以 $x=\ln(t^2+1)$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 。

原式$=\int(t^2+1)^2\cdot\arctan t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$=\int(t^2+1)\cdot 2t\cdot\arctan t\mathrm{d}t$$
$$=2\int t^3\arctan t\mathrm{d}t+2\int t\arctan t\mathrm{d}t$$
$$=2\int t^3\arctan t\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}t^4+2\int t\cdot\arctan t\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t^2$$
$$=\frac{1}{2}[t^4\cdot\arctan t-\int t^4\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t]+[t^2\cdot\arctan t-\int t^2\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t]$$
$$=\frac{1}{2}t^4\cdot\arctan t-\frac{1}{2}\int\frac{t^2(1+t^2)-(1+t^2)+1}{1+t^2}\mathrm{d}t+t^2\cdot\arctan t-\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}[\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t]+t^2\arctan t-[t-\arctan t]+C$$
$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\arctan t+t^2\arctan t-t+\arctan t+C$$
$$=(\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{2}+t^2)\arctan t-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t+C$$
$$=\frac{1}{2}(t^2+1)^2\arctan t-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t+C\ ,$$

将 $t=\sqrt{e^x-1}$ 代入此式

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(e^x-1)^{\frac{1}{2}}+C\ 。$$

方法5

令 $t=\sqrt{e^x-1}$,则 $e^x=t^2+1$,

所以 $x=\ln(t^2+1)$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$ 。

原式$=\int(t^2+1)^2\cdot\arctan t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$

$$=\int(t^2+1)\cdot 2t\cdot\arctan t\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\arctan t\mathrm{d}(t^2+1)^2$$
$$=\frac{1}{2}[\arctan t\cdot(t^2+1)^2-\int(t^2+1)^2\cdot\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t]$$
$$=\frac{1}{2}[(t^2+1)^2\cdot\arctan t-\int(t^2+1)\mathrm{d}t]$$
$$=\frac{1}{2}[(t^2+1)^2\cdot\arctan t-t-\frac{1}{3}t^3]+C$$
$$=\frac{1}{2}(t^2+1)^2\cdot\arctan t-\frac{1}{2}t-\frac{1}{6}t^3+C\ ,$$

将 $t=\sqrt{e^x-1}$ 代入此式

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(e^x-1)^{\frac{1}{2}}+C\ 。$$

方法6

令 $t=e^x$,则 $x=\ln t$,所以 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ 。

原式$=\int t^2\arctan\sqrt{t-1}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{t-1}\cdot\mathrm{d}t^2$$
$$=\frac{1}{2}t^2\cdot\arctan\sqrt{t-1}-\frac{1}{2}\int t^2\frac{\frac{1}{2\sqrt{t-1}}}{1+t-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^2\cdot\arctan\sqrt{t-1}-\frac{1}{4}\int\frac{t}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^2\cdot\arctan\sqrt{t-1}-\frac{1}{4}\int[(t-1)^{\frac{1}{2}}+(t-1)^{-\frac{1}{2}}]\mathrm{d}(t-1)$$

$$=\frac{1}{2}t^2\cdot\arctan\sqrt{t-1}-\frac{1}{4}[\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+2(t-1)^{\frac{1}{2}}]+C$$

$$=\frac{1}{2}t^2\cdot\arctan\sqrt{t-1}-\frac{1}{6}(t-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(t-1)^{\frac{1}{2}}+C\ ,$$

将$t=e^x$代入此式，

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(e^x-1)^{\frac{1}{2}}+C\ 。$$

评析：相比方法1和方法2，方法3至方法6均用换元法，把原式变为熟悉的形式，将复杂的计算和推证简化。

以上解法表明：凑微分法是求不定积分最简单的方法之一[2]。在解积分题目时，应注意一题多解，用多种方法解同一道题通常比盲目的做几道题的效果好。选择一道好的例题，通过一题多解，一题多讲，可以巩固学生的知识，训练其思维，开拓其视野[3]。

参考文献：

[1] 潘杰，苏化明.一道考研数学试题的多种解法[J].高等数学研究.2009,12(2):62-64.

[2] 王道权.谈谈积分中的一题多解[J]. 职教论坛.2002(8):61.

[3] 陶幼明，刘涛.一题多解培养学生创新思维能力[J].继续教育研究.2011(4):111-112.

（上接第46页）

[6] 李海鸣.江西省返乡农民工对创业扶持政策的评价调查及政策建议——基于对江西省全南县的调查[J].经济师,2016(12):150-154.

[7] 赵红专,翟立新,李强.公共科研机构绩效评价的指标与方法[J].科学学研究,2006(2):85-90.

[8] 朱明芬.农民创业行为影响因素分析——以浙江杭州为例[J].中国农村经济,2010(3):25-34.

[9] 郭红东,丁高洁.社会资本、先验知识与农民创业机会识别[J].华南农业大学学报,2012(3):78-85.

[10] 黄德林,宋维平,王珍.新形势下农民创业能力来源的基本判断[J].农业经济问题,2007(9):8-13+110.

（责任编辑：蒋召雪）