

# Stratonovich 型随机微分方程的三阶隐式型 随机 Runge-Kutta 算法

袁 玲,汪 慧,梁 静

(安徽新华学院通识教育部,安徽 合肥 230088)

**摘要:**构造求解 Stratonovich 型随机微分方程的强 1 阶收敛的三阶隐式型 Runge-Kutta 算法——IMRK 算法,证明了该算法与现有算法相比,具有更广的稳定区间和更高的精度。

**关键词:**随机微分方程;隐式型随机 Runge-Kutta 算法;彩色树理论

**中图分类号:**O211.63 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-1891(2018)04-0051-03

## Three-stage Implicit Stochastic Runge-Kutta Method for Stratonovich Stochastic Differential Equation

YUAN Ling, WANG Hui, LIANG Jing

(Department of Public Teaching, Anhui Xinhua University, Hefei 230009, China)

**Abstract:** Three-stage implicit stochastic Runge-Kutta method (IMRK method) with strong order 1 for the stochastic differential equation was obtained in this paper. It's been proved that IMRK method has wider range of stability and higher accuracy, comparing to the present method.

**Keywords:** Stochastic Differential Equation; Implicit Stochastic Runge-Kutta method; Colored Rooted Tree

### 0 引言

本文研究 Stratonovich 型标量自治的随机微分方程<sup>[1]</sup>如下:

$$\begin{cases} dy(t) = f(y)dt + g(y)dW(t), & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $W(t) = \{W_s, t_0 \leq t \leq T\}$  为标准维纳过程,  $f$  与  $g$  是  $[t_0, T] \times R$  上均满足 Lipschitz 条件与线性增长条件的可测函数。本文运用彩色树理论<sup>[2]</sup>, 构造求解该方程的三阶隐式型 Runge-Kutta 算法——IMRK 算法。

### 1 三阶隐式型随机 Runge-Kutta 算法 IMRK 算法的构造

为了构造 3 阶隐式型随机 Runge-Kutta 算法, 先选定一个三阶隐式型的确定性 Runge-Kutta 方法如下

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

将其作为 3 阶隐式型 Runge-Kutta 算法的确定性部分, 则可以设在隐式型 Runge-Kutta 算法的 Butcher 表<sup>[3]</sup>中有:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & d & a \end{pmatrix}, \alpha^T = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right), r^T = (r_1, r_2, r_3)$$

则使上述算法具有 1.0 阶全局收敛性的充要条件<sup>[4]</sup>是:

$$(E\|k_{k+1}\|^2)^{\frac{1}{2}} = O(h^{3/2}), E(k_{k+1}) = O(h^2), k=0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

不超过 1 阶的树只有树 1、树 2 和树 6; 1.5 阶的树为树 4、树 5、树 20 和树 22, 它们的 Stratonovich 型局部误差系数<sup>[3]</sup>如下:

- 树 1:  $t_0, J_0 - z^{(0)T}e$ ; 树 2:  $t_1, J_1 - z^{(1)T}e$ ;
- 树 6:  $[t_1]_1, J_{11} - z^{(1)T}\lambda^{(0)}$ ; 树 4:  $[t_1]_0, J_{10} - z^{(0)T}\lambda^{(1)}$
- 树 5:  $[t_0]_1, J_{01} - z^{(1)T}\lambda^{(0)}$  树 20:  $[t_1, t_1]_1, J_{111} - z^{(1)T}\lambda^{(1)2}/2$
- 树 22:  $[[t_1]_1]_1, J_{1111} - z^{(1)T}\lambda^{(1)3}/2$

其中,  $\lambda^{(i)} = Z^{(i)}e, i=0, 1, Z^{(0)} = hA, z^{(0)T} = ha^T, Z^{(1)} = J_1B, z^{(1)T} = J_1r^T, c = Ae, b = Be$ 。

根据阶条件, 树 1、树 2 和树 6 对应的阶条件为:

$$E(h - h\alpha^T e)^2 = O(h^3), E(J_1 - J_1 \gamma^T e)^2 = O(h^3), E(J_{11} - J_1^2 \gamma^T b)^2 = O(h^3).$$

由此推出的等价方程为:

$$\alpha^T e = 1, \gamma^T e = 1, \gamma^T b = \frac{1}{2} \tag{1}$$

树 4、树 5、树 20 和树 22 对应的阶条件为:

$$E(J_{10} - hJ_1 \alpha^T b) = O(h^2), E(J_{01} - hJ_1 \gamma^T c) = O(h^2),$$

$$E(J_{111} - J_1^3 \gamma^T b^2 / 2) = O(h^2), E(J_{111} - J_1^3 \gamma^T Bb) = O(h^2).$$

再以得到最小主误差常数<sup>[4]</sup>的原则推出相应的等价方程为:

$$\alpha^T b = \frac{1}{2}, \gamma^T c = \frac{1}{2}, \gamma^T b^2 = \frac{1}{3}, \gamma^T Bb = \frac{1}{6} \tag{2}$$

运用已知条件  $\alpha^T$  和  $A$ , 并且取  $\gamma^T = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$ , 解得

满足上述方程组 (\*) 和 (\*\*) 的一组解为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{10} & 1 & 0 \\ \frac{43}{35} & -\frac{10}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 + \left( \frac{1}{6} p - \frac{1}{12} q^2 + \frac{1}{6} qx \right) \left( \frac{2}{1-qx} + \frac{32}{8-2p+q^2-8qx} + \frac{40p-20q^2-112qx}{(40-10p+5q^2-40qx)(1-qx)} \right) \right. \\ \left. + \frac{43qx}{35(1-qx)^2} + \frac{\left( p - \frac{1}{2} q^2 - \frac{10}{7} qx \right)}{(1-qx)} \left( \frac{8}{8-2p+q^2-8qx} + \frac{10p-5q^2-28qx}{(40-10p+5q^2-40qx)(1-qx)} \right) \right]^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

证明: 将 IMRK2 算法 (3) 应用于求解与 Ito 型线性检验随机微分方程:  $dy = aydt + bydw(t)$

等价的 Stratonovich 型随机微分方程:  $dy = \left( a - \frac{1}{2} b^2 \right) ydt + bydw(t)$  可以得到:

$$y_{n+1} = y_n \left[ 1 + \left( \frac{1}{6} p - \frac{1}{12} q^2 + \frac{1}{6} qJ \right) \left( \frac{2}{1-qJ} + \frac{32}{8-2p+q^2-8qJ} + \frac{40p-20q^2-112qJ}{(40-10p+5q^2-40qJ)(1-qJ)} \right) \right. \\ \left. + \frac{43qJ}{35(1-qJ)^2} + \frac{\left( p - \frac{1}{2} q^2 - \frac{10}{7} qJ \right)}{(1-qJ)} \left( \frac{8}{8-2p+q^2-8qJ} + \frac{10p-5q^2-28qJ}{(40-10p+5q^2-40qJ)(1-qJ)} \right) \right]$$

即

$$R(h, a, b, J) = \left[ 1 + \left( \frac{1}{6} p - \frac{1}{12} q^2 + \frac{1}{6} qJ \right) \left( \frac{2}{1-qJ} + \frac{32}{8-2p+q^2-8qJ} + \frac{40p-20q^2-112qJ}{(40-10p+5q^2-40qJ)(1-qJ)} \right) \right. \\ \left. + \frac{43qJ}{35(1-qJ)^2} + \frac{\left( p - \frac{1}{2} q^2 - \frac{10}{7} qJ \right)}{(1-qJ)} \left( \frac{8}{8-2p+q^2-8qJ} + \frac{10p-5q^2-28qJ}{(40-10p+5q^2-40qJ)(1-qJ)} \right) \right]^2$$

则均方稳定函数为:

$$R(h, a, b) = E \left[ 1 + \left( \frac{1}{6} p - \frac{1}{12} q^2 + \frac{1}{6} qJ \right) \left( \frac{2}{1-qJ} + \frac{32}{8-2p+q^2-8qJ} + \frac{40p-20q^2-112qJ}{(40-10p+5q^2-40qJ)(1-qJ)} \right) \right. \\ \left. + \frac{43qJ}{35(1-qJ)^2} + \frac{\left( p - \frac{1}{2} q^2 - \frac{10}{7} qJ \right)}{(1-qJ)} \left( \frac{8}{8-2p+q^2-8qJ} + \frac{10p-5q^2-28qJ}{(40-10p+5q^2-40qJ)(1-qJ)} \right) \right]^2 \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 + \left( \frac{1}{6} p - \frac{1}{12} q^2 + \frac{1}{6} qx \right) \left( \frac{2}{1-qx} + \frac{32}{8-2p+q^2-8qx} + \frac{40p-20q^2-112qx}{(40-10p+5q^2-40qx)(1-qx)} \right) \right. \\ \left. + \frac{43qx}{35(1-qx)^2} + \frac{\left( p - \frac{1}{2} q^2 - \frac{10}{7} qx \right)}{(1-qx)} \left( \frac{8}{8-2p+q^2-8qx} + \frac{10p-5q^2-28qx}{(40-10p+5q^2-40qx)(1-qx)} \right) \right]^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ = R(p, q)$$

即得到了具有最小主误差常数的强 1 阶收敛的 3 级隐式型随机 Runge-Kutta 算法, 并将其称为 IMRK 算法。

IMRK 算法具体如下:

$$\begin{cases} Y_1 = y_n + J_1 g(Y_1) \\ Y_2 = y_n + h \left( \frac{1}{4} f(Y_1) + \frac{1}{4} f(Y_2) \right) + J_1 \left( -\frac{7}{10} g(Y_1) + g(Y_2) \right) \\ Y_3 = y_n + hf(Y_2) + J_1 \left( \frac{43}{35} g(Y_1) - \frac{10}{7} g(Y_2) + g(Y_3) \right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (f(Y_1) + 4f(Y_2) + f(Y_3)) + \frac{J}{6} (g(Y_1) + 4g(Y_2) + g(Y_3)) \end{cases} \tag{3}$$

## 2 IMRK 算法的均方稳定性

结论: IMRK2 算法的均方稳定函数<sup>[5]</sup>为  $R(p, q)$ ,

其中

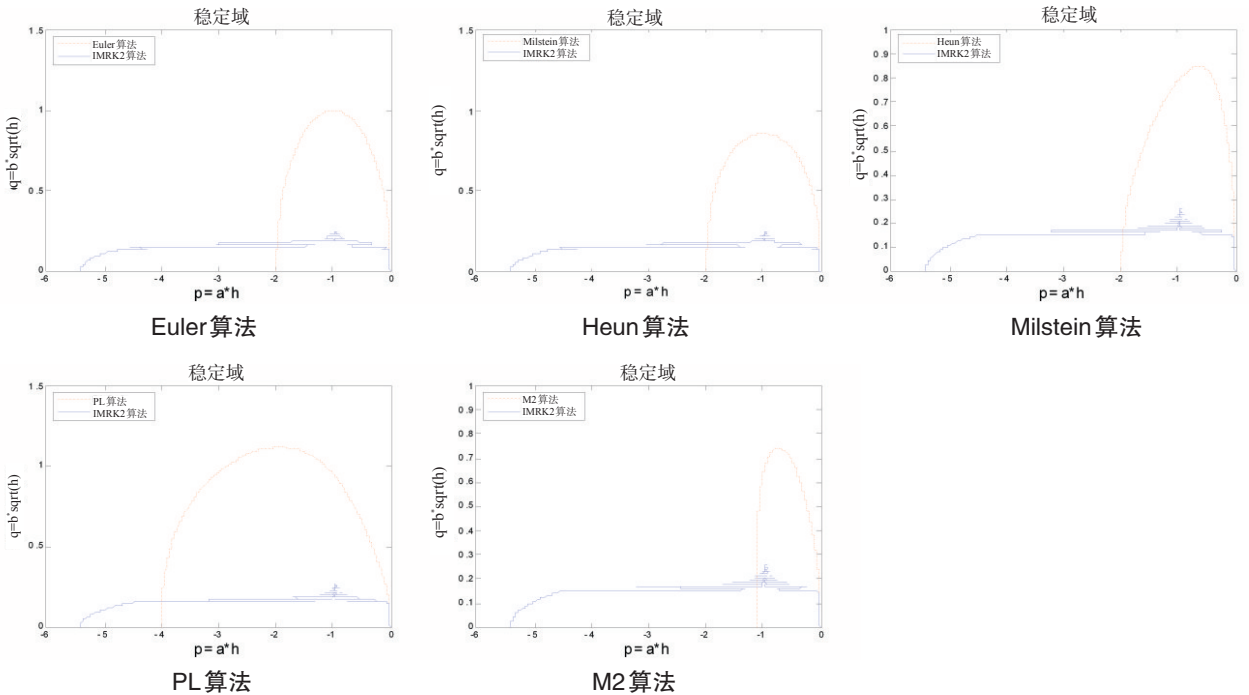


图1 Runge-Kutta——IMRK算法与5种算法的均方稳定域比较

将隐式型随机Runge-Kutta算法——IMRK算法与Euler算法<sup>[1]</sup>,Heun算法<sup>[2]</sup>,Milstein算法<sup>[4]</sup>,PL算法<sup>[6]</sup>,M2算法<sup>[4]</sup>的均方稳定域比较如图1。由图像可知,IMRK算法具有更广的稳定区间,即本文构造在稳定性方面具有其自身的优势。

### 3 IMRK算法精度数值实验

选取方程:

$$\begin{cases} dy = aydt + bydW(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (4)$$

取 $a = -26, b = 1$ ,用平均误差<sup>[7]</sup> $M$ 来表示算法的精度, $M = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K |y_N^{(i)} - y^{(i)}(t_N)|$ ,其中, $y_N^{(i)}$ 和 $y^{(i)}(t_N)$ 分别表

示第 $i$ 次模拟时在点 $t_N$ 处的数值解和准确解,是模拟次数取为 $K$ ,比较结果如表1所示。

表1 不同步长时误差精度比较

	$h=2^{-6}$	$h=2^{-7}$	$h=2^{-8}$	$h=2^{-9}$
Euler算法 <sup>[1]</sup>	1.7300E-02	1.1200E-02	7.7000E-03	5.4000E-03
Milstein算法 <sup>[8]</sup>	5.4000E-03	2.6000E-03	1.3000E-03	6.9354E-04
Heun算法 <sup>[10]</sup>	3.3000E-03	1.6000E-03	7.7047E-04	3.9656E-04
PL算法 <sup>[8]</sup>	3.7230E-01	3.7690E-01	3.6190E-01	3.8830E-01
M2算法 <sup>[4]</sup>	1.5300E-02	7.8000E-03	3.8000E-03	2.1000E-03
IMRK2算法	2.2000E-03	1.2000E-03	6.0386E-04	3.2915E-04

从表1中可以看出,本文的IMRK算法与现有算法相比,具有更高的精度。

### 参考文献:

- [1] 范振成,肖宇.随机微分方程组的依方程变步长Euler方法[J].黑龙江大学自然科学学报,2013,30(3):335-340.
- [2] T.H.Tian, K. Burrage. Two-stage Stochastic Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations[J].BIT,2002,42(3):625-643.
- [3] K.Burrage, P.M.Burrage. High Strong order Explicit Runge-Kutta Methods for Stochastic Ordinary Differential Equations[J]. Applied Numerical Mathematics,1996,22(1): 81-101.
- [4] 李炜.几种随机微分方程数值方法与数值模拟[D].武汉:武汉理工大学,2006.
- [5] K.Burrage, P.M.Burrage. Order Conditions of Stochastic Runge-Kutta Methods by B-series[J].SIAM Journal on Numerical Analysis, 2001, 38(5): 1626-1646.
- [6] 胡建成,罗敏.随机常微分方程的龙格库塔解法[J].四川大学学报学报(自然科学版),2012,49(4):747-752.
- [7] 张转叶.随机微分方程及其数值方法的研究[D].兰州:兰州大学,2010.