doi:10.16104/j.issn.1673-1891.2018.04.011

孪生素数猜想的一个简单证明

叶雉鸠
(陕西财经职业技术学院会计一系,陕西 咸阳 712000)

摘要:对孪生素数猜想进行了探索性的测试和论证。借助Excel的计算功能,提出了一个数论IF函数。把孪生素数猜想的证明转化为IF函数的求值问题。运用Excel对IF函数值的增性(不减性)进行了测试性研究。初步证明了IF函数值的非零性与不减性。如果进一步采用数学机械证明,则有望成功解决孪生素数猜想问题。

关键词:数论函数;孪生素数猜想;IF函数;机械证明;同余数
中图分类号:O156.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-1891(2018)04-0047-04

A Simple Proof of the Twin Prime Conjecture

YE Zhi-jiu
(Department of Accounting No1, Shaanxi Technical College of Finance & Economics, Xianyang, Shaanxi 712000, China)

Abstract: This paper explores and proves the twin prime conjecture. With the help of Excel's computing function, a number theoretic-IF function is proposed. The proof of twin prime conjecture is transformed into the evaluation problem of IF function. Excel is used to do a testability study on the increasing (undiminished) value of IF function. It is preliminarily proved that the value of IF function is non-zero and nondecreasing. If we further use mathematical mechanical proof, it is expected to solve the twin prime conjecture successfully.

Keywords: a number theory function; twin prime conjecture; IF function; the mechanical theorem proving; congruent numbers.

0 引言

纵观孪生素数猜想的诸多论述,孪生素数展现的规律是一个不断扩展衍变的过程。这一过程很难用普通的代数式来进行描述或者表示,所以其证明就很难用初等数论的方法来精确地完成。本文通过IF函数值的测试发现其衍变趋势过程具有不减的单调性。如果这一单调性通过数学机械化能够演算,则孪生素数猜想的研究可以推进一步了。

定义集合和函数:

$\{奇素数\}=\{3,5,7,11,\cdots\}=P$

$\{不大于\sqrt{2a+1}的奇素数\}=\{3,5,\cdots,P_b\}=P_b\subseteq P$

$a\geqslant 11$且$a\in N$。

IF函数是指Excel中的一个逻辑函数。IF函数表达的意思是当满足某条件时,返回一个值,否则返回另一个值。

1 孪生素数猜想的充分条件

孪生素数猜想成立的充分条件:对于任意大于10的正整数a($a\geqslant 11, a\in N$),若同余式方程组(1)恒无正整数解,则孪生素数猜想成立[1]。

$$\begin{cases}(2\times 4)^2-1\equiv 0(\bmod p_{01})\\(2\times 5)^2-1\equiv 0(\bmod p_{02})\\(2\times 6)^2-1\equiv 0(\bmod p_{03})\\\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\\left[2(a-1)\right]^2-1\equiv 0(\bmod p_{0(a-4)})\\(2a)^2-1\equiv 0(\bmod p_{0(a-4+1)})\\\max(p_{01},p_{02},\cdots,p_{0(a-4+1)})=p_b\leq\sqrt{2a+1}\end{cases}\tag{1}$$

注意:由于要证明孪生素数存在无穷多组,只要在p_b所约的$\sqrt{2a+1}$最大数域空间存在孪生素数即可,所以(1-1)中方程式的个数要取最大值,即$a=\frac{(p_{b+1})^2-1}{2}=-1$。$a$表示式分子上的$p_b+1$是比$p_b$大的下一个素数。

2 (1)中无解方程式个数的统计函数

如何来统计(1)中无解方程式个数?这要分两

收稿日期:2017-12-26
作者简介:叶雉鸠(1965—),男,陕西乾县人,副教授,工程硕士,研究方向:数学和经济学研究。

个步骤：首先要设法判定特定方程式无解，其次对所有无解方程式进行数量统计。

如何判定特定方程式无解？比如(1)中的第一个方程$(2\times4)^2-1\equiv0(\bmod p_{01})$是否无解，可以应用Excel的IF函数来进行判断。

如果$\mathrm{IF}(\prod_{v=3}^{v=p_b}\bmod((2\times4)^2-1,v)=0.0,1)=1$[①]，则$(2\times4)^2-1\equiv0(\bmod p_{01})$无解；

如果$\mathrm{IF}(\prod_{v=3}^{v=p_b}\bmod((2\times4)^2-1,v)=0.0,1)=0$，则$(2\times4)^2-1\equiv0(\bmod p_{01})$有解。

如何对(1)中所有无解方程式进行数量统计？那就是要对(1)中每个方程式的IF函数的值进行相加。这时，可以得到一个数论函数(2)。

$$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b\,|(2a)^2-1)=\sum_{u=4}^{u=a}\mathrm{IF}(\prod_{v=3}^{v=p_b}\bmod((2u)^2-1,v)=0,0,1) \tag{2}$$

(2)中u,v均为奇素数，$a=\dfrac{(p_{b+1})^2-1}{2}=-1$

以$p_b=3$为例，

$$IF(3|(2a)^2-1)=\sum_{u=4}^{u=a}IF(\prod_{v=3}^{v=p_b}\bmod((2u)^2-1,v)=0,0,1$$

$$=\sum_{u=4}^{u=11}IF(\prod_{v=3}^{v=3}\bmod((2u)^2-1,v)=0,0,1$$

$$=\mathrm{IF}(\bmod((2\times4)^2-1,3)=0,0,1)+\mathrm{IF}(\bmod((2\times5)^2-1,3)=0,0,1)+$$
$$+\mathrm{IF}(\bmod((2\times6)^2-1,3)=0,0,1)+\mathrm{IF}(\bmod((2\times7)^2-1,3)=0,0,1)+$$
$$+\mathrm{IF}(\bmod((2\times8)^2-1,3)=0,0,1)+\mathrm{IF}(\bmod((2\times9)^2-1,3)=0,0,1)+$$
$$+\mathrm{IF}(\bmod((2\times10)^2-1,3)=0,0,1)+\mathrm{IF}(\bmod((2\times11)^2-1,3)=0,0,1)=2 \tag{3}$$

以$p_b=5$为例，

$$IF(3,5|(2a)^2-1)=\sum_{u=4}^{u=a}IF(\prod_{v=3}^{v=p_b}\bmod((2u)^2-1,v)=0,0,1$$

$$=\sum_{u=4}^{u=23}IF(\prod_{v=3}^{v=5}\bmod((2u)^2-1,v)=0,0,1$$

$$=\mathrm{IF}(\bmod((2\times4)^2-1,3)\bmod((2\times4)^2-1,5)=0,0,1)+$$
$$+\mathrm{IF}(\bmod((2\times5)^2-1,3)\bmod((2\times5)^2-1,5)=0,0,1)+$$
$$+\cdots+\mathrm{IF}(\bmod((2\times23)^2-1,3)\bmod((2\times23)^2-1,5)=0,0,1)$$
$$=4 \tag{4}$$

3 IF函数的值

$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a)^2-1)$函数是今天人们尚不熟悉的函数。幸运的是，这个$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a)^2-1)$函数可以通过手工计算其大小，只是费时一些，所以针对$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a)^2-1)$进行机械计算是可行的。作者是用Excel表来进行计算。借助Excel表格计算得出$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a)^2-1)$的值如表1所示。

表1　$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a)^2-1)$函数值表

p_b	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
IF函数值	2	4	8	9	16	17	21	29	30	41	48	50	61	74
p_b	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
IF函数值	87	91	110	121	123	138	152	166	187	202	208	218	223	234
p_b	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191
IF函数值	276	288	315	320	365	374	394	411	432	455	480	492	541	547
p_b	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	…
IF函数值	567	574	626	685	708	716	732	764	772	818	851	878	921	…

注：表中是经过完全测试计算出的准确值。

表1中IF函数值的发展趋势如图1所示。

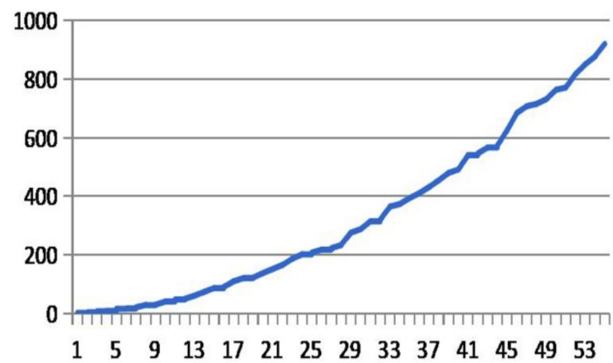

图1　测试(1)中无解方程式个数的值

从表1中IF函数值的发展趋势来看，$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a)^2-1)$的值具有"不下降"的趋势。

4 IF函数非0性的证明

用Excel表格容易测算得出

$$IF(3,5,7,\cdots,p_b|2a+1)=\sum_{u=4}^{u=a}IF(\prod_{v=3}^{v=p_b}\bmod(2u+1,v)=0,0,1\geq5 \tag{5}$$

根据能否整除的特性可知：

$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a+1)^n=\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a+1)^2)=\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|2a+1)$

$$=\sum_{u=4}^{u=a}IF(\prod_{v=3}^{v=p_b}\bmod((2u+1)^2,v)=0,0,1\geq5 \tag{6}$$

$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|2^n(2a+1))=\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|2(2a+1))=\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|2a+1)$

$$=\sum_{u=4}^{u=a}IF(\prod_{v=3}^{v=p_b}\bmod(2(2u+1),v)=0,0,1\geq5 \tag{7}$$

得知$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a+1)^2)-\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|2(2a+1))=0$

因为$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a)^2-1)=\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a+1)^2-2(2a+1))$　(8)

又$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a+1)^2-2(2a+1))$

$\neq\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a+1)^2)-\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|2(2a+1))$[②]　(9)

所以$\mathrm{IF}(3,5,7,\cdots,p_b|(2a+1)^2-2(2a+1))\neq0$　(10)

为了直观的表现这一非零性的证明技巧，帮助人们准确把握这一数论函数，我们随便选择一个p_b，比如p_b=29，展示如下：

当p_b=29时，所对应的IF函数赋值如（11）所示。

$$IF(3,5,7,\cdots,29\,|(2\times479)^2-1=\sum_{u=4}^{u=479}IF(\prod_{v=3}^{v=29}\mathrm{mod}(2u)^2-1,v)$$
=0,0,1)　　（11）

因为IF(3,5,7,…,29|(2×479 + 1)²- IF(3,5,7,…,p_b|2(2×479 + 1))

= IF(3,5,7,…,29|(2×479+1)²)- IF(3,5,7,…,p_b|(2×479 + 1)

=152-152

=0　　（12）

由(9)得出

IF(3,5,7,…,29|(2×479+1)² − 2(2×479 + 1))≠0　　（13）

事实上，查表1可知

IF(3,5,7,…|(2×479)² − 1)

=IF(3,5,7,…|(2×479+1)² − 2(2×479 + 1))

=30

≠0　　（14）

证毕。

5 IF函数的一个逼近估计的下限

5.1 IF函数Excel计算表的分析

用来计算IF函数的Excel表格具有以下三大特点：

1、A列是从4到 $\frac{(p_{b+1})^2-1}{2}-1$ 连续的自然数；

2、A列当中从4到 $\frac{p_b+1}{2}$ 所涉及的各行，每行当中必然有相对于p_b以内的素数余数为0的单元格，即$\sum_{u=4}^{u=\frac{p_b+1}{2}}IF(\prod_{v=3}^{v=pb}\mathrm{mod}(2u+1,v)=0,0,1)=0$；

3、对"方程式左边的值"取模3到模p_b的同余区域的各列纵向进行分析观察，会发现各列的同余数遵循严格的周期性，周期长度为各列所对应的模，而且各列余数纵向非0的概率是$1-\frac{2}{p}$。

5.2 IF函数的逼近式

依据容斥原理[2]对IF函数进行逼近估计得(15)的逼近式

$$[\frac{(p_{b+1})^2-1}{2}-1-\frac{p_b+1}{2}]\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{2}{7})\times(1-\frac{2}{11})\times\cdots\times(1-\frac{2}{p_b})$$ ③

（15）

5.3 IF函数逼近式的下限

下面对(15)逼近式的下限进行推导

因为$(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{2}{7})\times(1-\frac{2}{11})\times\cdots\times(1-\frac{2}{p_b})$

$>(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{2}{7})\times(1-\frac{2}{9})\times(1-\frac{2}{11})\times\cdots\times(1-\frac{2}{p_b})$　（添项）

且 $(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{2}{7})\times(1-\frac{2}{9})\times(1-\frac{2}{11})\times\cdots\times(1-\frac{2}{p_b})=\frac{1}{p_b}$

（相约化简）

所以(1-15) $>[\frac{(p_{b+1})^2-1}{2}-1-\frac{p_b+1}{2}]\times\frac{1}{p_b}$　　（16）

因为$p_b+1\geqslant p_b+2$

所以$[\frac{(p_{b+1})^2-1}{2}-1-\frac{p_b+1}{2}]\times\frac{1}{p_b}$

$\geqslant[\frac{(p_{b+2})^2-1}{2}-1-\frac{p_b+1}{2}]\times\frac{1}{p_b}$

$=[\frac{(p_b)^2+3\times p_b}{2}]\times\frac{1}{p_b}$

$=\frac{p_b+3}{2}\geq3$ ④　　（17）

(15)的逼近值、(17)的下限值和IF函数值的发展趋势如图2所示。

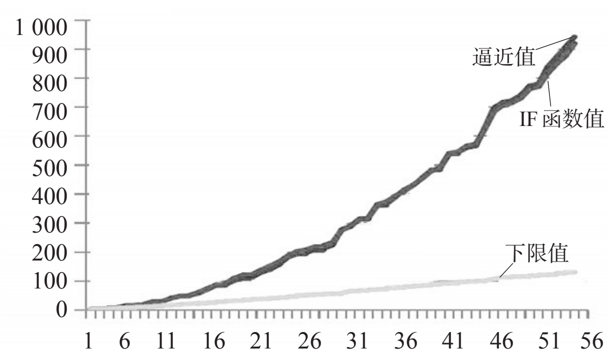

图2　逼近值、下限值和IF函数值

例如：当p_b=29时，所对应的IF函数的逼近估计由(15)得(18)

IF(3,5,7,…,29|(2×479)² − 1)

$\approx[\frac{31^2-1}{2}-1-\frac{29+1}{2}]\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{2}{7})\times(1-\frac{2}{11})\times\cdots\times(1-\frac{2}{29})$

$=(479-15)\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{2}{7})\times(1-\frac{2}{11})\times\cdots\times(1-\frac{2}{29})$

=30.80　　（18）

(18)的30.80与(14)的30误差仅为0.80。这个0.80的误差一旦取整就是0，可见(15)的逼近估计的精确度还是很高的。

6 结论

如果各位认可(9)或者(17)二者之一，"孪生素数猜想已经成功证明了！"

如果各位质疑(9)和(17)，那么请用Excel表来

继续测算表1数据。尽管Excel计算工作量非常巨大，但是采用数学机械化方法就简便得多。“四色定理”数学机械化方法为我们开辟了道路。1976年6月，美国数学家阿佩尔(Kenneth Appel)与哈肯(Wolfgang Haken)在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上，用了1 200 h，作了100亿个判断，结果没有一张地图是需要五色的，最终证明了四色定理，轰动了世界。

中国数学机械化方法[3]的代表人物有吴文俊、张景中、杨路、侯晓荣、王浩等人。一旦执行机械证明，经过上亿次的验算，进一步确认了IF(3,5,7,11,⋯ | $(2a)^2-1$)的值确实具有“不下降”趋势，那么猜想成立就铁定了。因为IF(3,5,7,⋯ | $(2a)^2-1$) ≠0或者≥2就是指方程组(1)当中至少存在一个或者两个方程式无正整数解。至少存在一个或者两个方程式无正整数解——就意味着，对于特定的p_b，(1)的左端至少存在一对或者两对孪生素数。

希望中国数学界同仁能够增强中华民族的文化自信，讨论2014年发表于《西昌学院学报》第4期上的证明[4]和上述证明。

附表1：IF(3,5,7,11 | $(2\times 83)^2-1$)的计算表

行次	a	$(2a)^2$-1	P_b				同余数0的个数	无解方程式个数
	A	B	C	D	E	F	G	H
1			3	5	7	11		
2	4	63	0	3	0	8	2	
3	5	99	0	4	1	0	2	
4	6	143	2	3	3	0	1	
5	7	195	0	0	6	8	2	
6	8	255	0	0	3	2	2	
7	9	323	2	3	1	4	0	
8	10	399	0	4	0	3	2	
9	11	483	0	3	0	10	2	
10	12	575	2	0	1	3	1	
11	13	675	0	0	3	4	2	
12	14	783	0	3	6	2	1	
…	…	…	…	…	…	…	…	…
76	78	24 335	2	0	3	3	1	
77	79	24 963	0	3	1	4	1	
78	80	25 599	0	4	0	2	2	
79	81	26 243	2	3	0	8	1	
80	82	26 895	0	0	1	0	3	
81	83	27 555	0	0	3	0	3	9

注释：

① 该公式在Excel表格中应用时，要添上乘号*，调整为Excel识别的函数，以下同。

② 大家知道，由$f(x_2\text{-}x_1)=f(x_2)\text{-}f(x_1)$所决定的函数$f(x)=kx$是奇函数，而且是一元线性函数。公式(9)所展示的IF函数(IF(3,5,7⋯p_b|$(2a+1)^2-2(2a+1)$))本身是偶函数，而且是非线性函数，故有(9)的不等式成立。

③ 请研究IF(3,5,7⋯p_b|$(2a)^2-1$)函数的计算表 (附表1：IF(3,5,7,11|$(2\times83)^2-1$)的计算表)，依据容斥原理，基于区间$(\frac{p_b+1}{2},\frac{(p_{b+1})^2-1}{2}-1)$的连续性和以$p_b$为模的同余的周期性，即可得出(15)。但是要注意，(15)忽略了容斥原理下的“层层取整”，同时(15)是基于完全剩余系和均匀分布这两个基本假设所得出的，所以只能称之为逼近估计。该逼近估计可以表明IF函数是递增的。

④ 查看表1，当p_b=3时，IF函数值等于2——这好像与(17)相矛盾。其实不矛盾，原因是(17)所估计的区间是$(\frac{p_b+1}{2},\frac{(p_{b+2})^2-1}{2}-1)=[2,11]=[3,11]$，而表1所对应的(1)所估计的区间是[4,11]。

参考文献：

[1] 叶雉鸠.孪生素数猜想的一个充分条件[J].高师理科学刊,2015(1):16−18.

[2] 卢开澄.组合数学[M].北京:清华大学出版社,1983.

[3] 张景中.数学杂谈[M].北京:中国少年儿童出版社,2011.

[4] 叶雉鸠.孪生素数猜想的证明[J].西昌学院学报,2014(4):27−30.

（责任编辑：曲继鹏）