

线性空间中函数的单位分解性

罗炯兴¹, 刘焕文²

(1. 西昌学院少数民族预科教育学院, 四川 西昌 615000;

2. 浙江海洋大学船舶与机电工程学院, 浙江 舟山 316022)

摘要:利用微分流形研究了实数域 \mathbb{R} 上的 n 维线性空间 X 的连续函数,指出在线性空间 X 中存在满足单位分解的一簇光滑函数 $\{g_i \in C^\infty(X) \mid 1 \leq i \leq +\infty, i \in \mathbb{N}^+\}$,并得到了线性空间 X 中函数的一个单位分解定理;另外,在二维线性空间 X 中应用单位分解定理,指出了存在定义在任意开凸体 A 上,满足单位分解性的3个连续函数,这样将线性空间与微分流形相结合,为研究线性空间的函数分解问题及相关问题提出了一种新方法。

关键词:线性空间;微分流形;单位分解性;开凸体

中图分类号:O177.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-1891(2018)03-0051-07

On the Unit Decomposition of Functions in the Linear Space

LUO Jiong-xing¹, LIU Huan-wen²

(1. School of Preparatory Education for Minorities, Xichang University, Xichang, Sichuan 615000, China;

2. School of Naval Architecture and Mechanical Engineering, Zhejiang Ocean University, Zhoushan, Zhejiang 316022, China)

Abstract: Using the knowledge of differential manifold, the linear space with the dimension of n on the real number field was researched. In linear space, the existence about a cluster of smooth functions $\{g_i \in C(X) \mid 1 \leq i \leq +\infty, i \in \mathbb{N}^+\}$ satisfying the unit decomposition were pointed out, and a unit decomposition theorem was established. In addition, applying the unit decomposition theorem in the linear space with the dimension of 2, the existence was shown that the three continuous functions satisfying the unit decomposition were defined in arbitrary open convex body. The linear space was combined with differential manifold, and a new method was showed to research decomposition and related problem of functions in the general linear space.

Keywords: linear space; differential manifold; unit decomposition; open convex body

0 引言

在文中,若函数的全部求和恒等于1,称函数满足单位分解性;把与此性质相关的定理称为函数的单位分解定理。现在,数学研究的许多问题主要的并不涉及单个对象,如一个函数、测度或算子,而是处理一大类型这种对象。在这方面出现的大多数有价值的类实际上是具有实数域 \mathbb{R} 或复数域 \mathbb{C} 上的线性空间,由于极限过程在每个解析问题里(明显或隐蔽地)起作用,因此,这些线性空间都可能配备度量,或者至少是拓扑,然后,从度量和拓扑的角度来考虑线性空间中的相关问题。

众所周知,在实数域 \mathbb{R} 上的 n 维线性空间 X 中定义一个范数,可以使之成为一个赋范空间、度量空间和拓扑空间,通常称为赋范线性空间。目前关于赋范线性空间研究的课题和方向有很多,例如等距线性延拓问题^[1-3],一般范数的正交关系^[4-7]等问题。除此之外,还能够在线性空间中建立一个微分结构,使之成为一个微分流形。微分流形是一类重要的拓扑空间,它除了具有通常的拓扑结构外,还添上了微分结构,现代微分几何的研究是建立在微分流形框架上的。在微分流形的观点下,可以认为古典微分几何中二维欧氏空间 \mathbb{R}^2 中的曲线是一维微分流形,三维欧氏空间 \mathbb{R}^3 中的曲线和曲面分别是二维、三维微分流形。

收稿日期:2017-12-05

基金项目:2014年广西自然科学基金:缓坡类方程的准确解析解及在近海工程中的应用(2014GXNSFAA118322)。

作者简介:罗炯兴(1985—),男,四川阆中人,助教,硕士,研究方向:样条函数理论及其逼近,偏微分方程数值解。

在线性空间 X 中应用微分流形,可以研究线性空间的某些重要性质.如对于实数域 \mathbb{R} 上 n 维线性空间,对于所有 m 维子空间组成的集合,能够利用矩阵中的一般线性群 $GL(m)$, 建立一个微分流形,称之为 Grassmann 流形 $G(m,n)$. 这样,可以从研究 Grassmann 流形 $G(m,n)$ 来间接研究 n 维线性空间 X 的性质.文献[8]在欧氏空间 \mathbb{R}^n 构造了 Clifford 代数 Cl_n 的不可约表示空间,文献[9-10]利用示性类及微分几何的方法证明了定向 Grassmann 流形 $G(2,n)$ 的上同调可以用它上面的典范失众的 Euler 类生成,给出了线性空间 X 中嵌入定向曲面的 Gauss 映射 $g: X \rightarrow G(2,n)$ 在同调群上的表达式,等等.

目前,已经有许多国内外专家和学者^[13-16]研究了定义在闭区间 $[0,1]$ 上的任意连续函数,可以分解为两个连续函数之和,且这两个函数的图像的 Hausdorff 维数大于等于 1, 小于等于 2. 但这些研究结果只是针对于实数域上的闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数,换言之,将问题限制在一维线性空间范围之内,并且使用的方法有一定的局限性,难以推广应用到二维及二维以上线性空间,甚至更一般的赋范空间或者拓扑空间.

文中指出实数域 \mathbb{R} 上的 n 维线性空间 X 是满足第二可数公理的 n 维流形,应用微分流形指出在线性空间 X 中存在满足单位分解的一簇光滑函数 $\{g_i \in C^\infty(X) | 1 \leq i \leq +\infty, i \in \mathbb{N}^+\}$, 给出了一个关于函数的单位分解定理.更进一步,对于二维线性空间 X 上的任意开凸体 A 应用单位分解定理,指出了存在定义在 A 上三个连续函数 g_1, g_2 和 g_3 , 满足 $\sum_{i=1}^3 g_i = 1, 0 \leq g_1, g_2, g_3 \leq 1$, 且对任意 $a \in (0,1)$, 存在 $x_i \in A$, 使得 $g(x_i) = a$, 其中, $i=1,2,3$. 这样将线性空间与微分流形相结合,为研究线性空间,甚至赋范空间和拓扑空间的函数分解一般问题及其相关问题提出了一种新方法,有助于解决问题.

1 预备知识

现在,介绍微分流形的基本定义和概念,以及单位分解定理.

定义 1.1^[1] 设 M 是一个 Hausdorff 拓扑空间,若 M 的每一点 p 都有一个开邻域 $U \subseteq M$, 使得 U 和 n 维欧氏空间 \mathbb{R}^n 中的一个开集是同胚的,则称 M 是一个 n 维拓扑流形,简称为 n 维流形.换言之,所谓 n 维流形就是在它的每一点的一个领域内可以建立 n 维局部坐标系的 Hausdorff 拓扑空间.

定义 1.2^[1] 设 M 是一个 n 维拓扑流形, (U, φ) 和 (V, ψ) 是它的两个坐标卡.若当 $U \cap V \neq \emptyset$ 时, $\varphi \circ \psi^{-1}$,

$\psi \circ \varphi^{-1}$ 都是 C^r 的(其中 r 是正整数,或 ∞ , 或 ω), 则称坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 是 C^r 相关的.

当 $U \cap V = \emptyset$ 时,我们总是认为 (U, φ) 和 (V, ψ) 对于任意的 r 是 C^r 相关的.

定义 1.3^[1] 设 M 是 n 维拓扑流形,假定 $\Lambda = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in I\}$ 是 M 的坐标卡的一个集合,并满足以下条件:

- (1) $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ 构成流形 M 的一个开覆盖;
- (2) 属于 Λ 的任意两个坐标卡都是 C^r 相关的;
- (3) Λ 是 C^r 极大的,即:如果假定 (U, φ) 是 M 的一个坐标卡,且 (U, φ) 与 Λ 中的每一个成员都是 C^r 相关的,则 (U, φ) 必属于 Λ .

此时,我们称坐标卡集 Λ 为流形 M 上的一个 C^r 微分结构;当 $r = \infty$ 时, Λ 称为 M 上的一个光滑结构;当 $r = \omega$ 时, Λ 称为 M 上的一个解析结构.

定义 1.4^[1] 设 M 是 n 维拓扑流形,若在 M 上指定了一个 C^r 微分结构 Λ , 则称 (M, Λ) 为一个 n 维 C^r 微分流形,属于 Λ 的坐标卡 (U, φ) 称为该微分流形的容许坐标卡.

当 $r = \infty$ 时,称 (M, Λ) 为光滑流形;当 $r = \omega$ 时,称 (M, Λ) 为解析流形.

现在,给出光滑流形 M 上光滑函数及其支撑集的定义.

定义 1.5^[1] 设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在光滑流形 M 上的连续函数,若存在 M 的一个容许坐标卡 (U, φ) , 使得 $x \in U$, 且 $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ 是在点 $\varphi(x)$ 处光滑的函数,则称函数 f 在点 x 处是光滑的.若 f 在每一点 $x \in U$ 都是光滑的,则称函数 f 是流形 M 上的光滑函数.

定义 1.6^[1] 设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在光滑流形 M 上的连续函数,所谓 f 的支撑集是指 f 取非零值的点的集合的闭包,记作 $Supp f$, 即

$$Supp f = \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}},$$

支撑集 $Supp f$ 的补集是 M 中使 $f=0$ 的最大的开支集.

称 M 满足第二可数公理,是指 M 的拓扑中一个拓扑基是一个可数簇.

设 Σ_0 是 M 的子集的一个集合,如果 M 中每一个点都有一个邻域,它仅与 Σ_0 中有限多个成员相交,则称子集簇 Σ_0 是局部有限的.

设 Σ_1, Σ_2 是 M 的两个开覆盖,如果对于 Σ_2 中任意一个成员 V , 必能在 Σ_1 中找到一个成员 U , 使 $V \subseteq U$ 得,则称 Σ_2 是开覆盖 Σ_1 的加细.

引理 1.1^[1](单位分解定理) 设 M 是满足第二可数公理的 n 维光滑流形, $\Sigma = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$ 是 M 的任意一个开覆盖,则 Σ 必有一个可数的、局部有限的加细开

覆盖 $\Sigma_0 = \{V_i | 1 \leq i < \infty, i \in \mathbb{N}^+\}$, 以及定义在 M 上的一簇光滑函数 $\{f_i \in C^\infty(M) | 1 \leq i \leq \infty, i \in \mathbb{N}^+\}$, 使得 $0 \leq f_i \leq 1$, $Supp f_i$ 是包含在 V_i 内的紧致子集, 并且 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \equiv 1$ 。

光滑函数簇称为从属于 Σ 的单位分解, 也称为定义在 M 中满足单位分解的光滑函数簇。由于 $Supp f_i \subseteq V_i$, 且 $\{V_i | 1 \leq i \leq \infty\}$ 是局部有限的, 所以每一点 $p \in M$ 必有一个邻域 W , 使 \bar{W} 紧致, 因而 W 只与有限多个邻域 V_i 相交, 换言之, 只有有限多个函数 f_i 在点 p 不为零, 故 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(p)$ 只是有限多项的和。

2 线性空间中光滑函数的单位分解性

本节构造了线性空间 X 中拓扑的一个可数拓扑基, 显示了 X 是满足第二可数公理的光滑流形, 利用单位分解定理引理 1.1 建立了一簇光滑函数, 函数值介于 0 到 1 之间且全部求和恒等于 1 的光滑函数簇, 每个函数的支撑集是紧致的, 如定理 2.1 所示。

首先, 对于实数域 \mathbb{R} 上 n 维线性空间 X 给定一组基底 $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$, 其中, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in X$, 对于任意 $x \in X$, 可唯一表示为

$$x = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \dots + x_n\eta_n$$

其中 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ 。故只要在 X 中给定一组基底, 对于 X 中任意一个向量 x 与唯一的 n 元实数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 一一对应, 即是 X 同构于欧氏空间 \mathbb{R}^n , 记为 $X \cong \mathbb{R}^n$ 。全文若无特别说明, 总认为 n 维线性空间 X 给定一组基底为 $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ 。

规定 X 中的零向量 $O = 0 \cdot \eta_1 + 0 \cdot \eta_2 + \dots + 0 \cdot \eta_n$, 不失一般性, 对于任意 $x \in X$, 对应的唯一的 n 元实数组表示为 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 故零向量 O 对应的唯一的 n 元实数组表示为 $(0, 0, \dots, 0)$ 。可以在 n 维线性空间 X 中定义一个度量映射

$$\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

即对于任意 $x, y \in X$, 令

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

容易验证 ρ 是 X 的一个度量。事实上, 对于任意 $x, y, z \in X$, 有

(1) $\rho(x, y) \geq 0$, 当且仅当 $x=y$ 时取等号。当 $x=y$

时, 则有 $x_i = y_i, i=1, 2, \dots, n$, 则 $(x_i - y_i)^2 > 0$, 所以

$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = 0$; 当 $x \neq y$ 时, 至少存在一个 $x_i \neq y_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $(x_i - y_i)^2 > 0$, 故 $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} > 0$ 。

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 。这是因为

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} = \rho(y, x)$$

(3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ 对于任意 $(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ 由 Schwarz 不等式得 $\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$, 进而有

$$2 \sum_{i=1}^n u_i v_i + \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 + \sum_{i=1}^n v_i^2 \right) \leq 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} + \left(\sum_{i=1}^n u_i^2 + \sum_{i=1}^n v_i^2 \right),$$

$$\text{变形为} \quad \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \right)^2,$$

等价于

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

令 $u_i = x_i - y_i$ 和 $v_i = y_i - z_i$, 所以,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2},$$

即, $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ 。因此, X 是以 ρ 为度量的一个度量空间。

在 n 维线性空间 X 中, 对于任意 $x \in X$, 规定以点 x 为中心, 半径为 a 的 $n-1$ 维超球面 $S_a^{n-1}(x)$ 定义为:

$$S_a^{n-1}(x) := \{y \in X | \rho(y - x) = a\},$$

和以点 x 为中心, 半径为 a 的 n 维开球体 $V_a^n(x)$ 定义为:

$$V_a^n(x) := \{y \in X | \rho(y - x) < a\},$$

其中 $a \in \mathbb{R}^+$ 。根据超球面和开球体的定义可得下列关系式:

$$(1) x \notin S_a^{n-1}(x), x \in V_a^n(x).$$

$$(2) S_a^{n-1}(x) \subseteq X, V_a^n(x) \subseteq X, V_a^n(x) = \left(\bigoplus_{a \in (0, a)} S_a^{n-1}(x) \right) \cup \{x\}.$$

$$(3) X = \left(\bigoplus_{a \in \mathbb{R}^+} S_a^{n-1}(x) \right) \cup \{x\}, X = \bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} V_a^n(x) = \lim_{a \rightarrow +\infty} V_a^n(x).$$

根据度量空间 X 球形领域的定义可知, 开球体 $V_a^n(x)$ 是 x 的一个球形邻域, 且在度量空间中每一个球形邻域都是开集^[12], 于是有下列引理 2.1。

引理 2.1 对于任意 $x \in X, a \in \mathbb{R}^+$, 开球体

$$V_a^n(x) = \{y \in X | \rho(y - x) < a\}$$

是 X 中的开集。

对于任意 $x, y \in X$, 且 $x \neq y$, 则 $\rho(x, y) > 0$ 。

取 $\varepsilon = \frac{\rho(x, y)}{2}$ 有 $V_\varepsilon^n(x) \cap V_\varepsilon^n(y) = \emptyset$ 。因为在 X 中的开球体是开集, 故 $V_\varepsilon^n(x), V_\varepsilon^n(y)$ 分别是点 x, y 的邻域, 所以 X 是一个 Hausdorff 空间, 由 $X \cong \mathbb{R}^n$ 得, X 是一个 n 维拓扑流形。取 $U = X$, 对于任意 $x \in U$, 定义映射 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, 即

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

易知 $\Lambda = \{U, \varphi\}$ 是流形 X 的一个光滑结构, 因此 (X, Λ) 是一个 n 维光滑流形。

下面给出一个在实数域 \mathbb{R} 上 n 维线性空间 X 中

建立的单位分解定理,指出存在一簇光滑函数 $\{f_i \in C(X) | 1 \leq i < \infty\}$, 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \equiv 1$, 如定理 2.1 所示。

定理 2.1 在 n 维线性空间 X 中, 设 $\Sigma = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$ 是 X 的任意一个开覆盖, 则 Σ 必有一个可数的、局部有限的加细开覆盖 $\Sigma_0 = \{V_i | 1 \leq i < \infty\}$, 以及定义在 X 上的一簇光滑函数

$$\{f_i \in C^\infty(X) | 1 \leq i < \infty\},$$

使得 $0 \leq f_i \leq 1$, $Supp f_i$ 是包含在 V_i 内的紧致子集, 并且 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \equiv 1$ 。

证明(1)证明线性空间 X 是满足第二可数公理的 n 维光滑流形。

已知 (X, ρ) 是一个度量空间, 设 Γ_ρ 为由 X 中的所有开集构成的集簇, 根据度量空间的开集的性质和拓扑的定义, 得 Γ_ρ 是 X 的一个拓扑, 故 (X, Γ) 是一个拓扑空间。

现在考虑用 X 中部分开球体表示的集簇 Φ , 表示为

$$\Phi := \{V_\alpha^n(x) | x \in X, \alpha \in \mathbb{Q}^+ \text{ 且 } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Q}\}.$$

首先, 验证 Φ 是 X 中的拓扑 Γ_ρ 的一个基^[5]。事实上, 对于 X 中的每一个点 x 和点 x 的每一个邻域 U , 则存在一个球形邻域 $B(x, \varepsilon)$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, 其中 $\varepsilon > 0$, 任取 $y \in B(x, \varepsilon)$, 使得 $\rho(x, y) = \frac{\varepsilon}{3}$, 即是

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \frac{\varepsilon}{3},$$

其中, $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n$ 。根据有理数在实数中是稠密的, 即在任意两实数之间必存在有理数, 于是存在 $u_i \in \mathbb{Q}$, 使得 $x_i < u_i < y_i$ 或者 $y_i < u_i < x_i$, 由此有

$$|x_i - u_i| < |x_i - y_i| \Leftrightarrow (x_i - u_i)^2 < (x_i - y_i)^2, \text{ 使得}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - u_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \frac{\varepsilon}{3} \text{ 成立。}$$

设 $u = u_1\beta_1 + u_2\beta_2 + \dots + u_n\beta_n$, 则 $u \in X$, 于是有 $\rho(x, u) < \frac{\varepsilon}{3}$ 又根据有理数的性质可得, 存在 $q \in \mathbb{Q}$, 满足 $\frac{\varepsilon}{3} < q < \frac{2\varepsilon}{3}$ 使得 $\rho(x, u) < q$, 故 $x \in B(u, q)$, 即是 x 属于以点 u 为中心, 以点 q 为半径的球形邻域 $B(u, q)$ 。

现在说明 $B(u, q) \subseteq B(x, \varepsilon)$ 。事实上, 任意取 $z \in B(u, q)$, 则有 $\rho(u, z) < q$ 。在度量空间 X 中, 满足 $\rho(x, z) \leq \rho(x, u) + \rho(u, z)$, 于是

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, u) + \rho(u, z) < \frac{\varepsilon}{3} + q < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3}$$

即是 $\rho(x, z) < \frac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon$, 故 $z \in B(x, \varepsilon)$, 所以 $B(u, q) \subseteq B(x, \varepsilon)$ 。又因为 $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, 得 $B(u, q) \subseteq U$ 。

易知, 点 u 的球形邻域 $B(u, q)$ 就是本文定义的开球体 $V_\alpha^n(u)$, 即 $(u, q) \in \Phi$, 可表示为 $B(u, q) = V_\alpha^n(u)$ 。于

是有 $x \in V_\alpha^n(u) \subseteq U$, 因此集簇 Φ 是拓扑空间 X 中的拓扑 Γ_ρ 的一个基。

然后, 又根据有理数集 \mathbb{Q} 和正有理数集 \mathbb{Q}^+ 都是一可数集合, 可知

$$\Phi = \{V_\alpha^n(x) | x \in X, \alpha \in \mathbb{Q}^+ \text{ 且 } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Q}\}$$

也是一可数集合^[12]。所以, 集簇 Φ 是拓扑空间 X 中的拓扑 Γ_ρ 的一个可数基, 即是拓扑空间 X 满足第二可数公理。

已知线性空间 X 是一个 n 维光滑流形, 因此, 线性空间 X 是满足第二可数公理的 n 维光滑流形。

(2) 证明在线性空间 X 中存在一簇光滑函数, 且求和恒等于 1。

设 $\Sigma = \{U_\alpha | \alpha \in I\}$ 是 X 的任意一个开覆盖, 由(1)得是满足第二可数公理的 n 维光滑流形。由单位分解定理引理 1.1 得 Σ 必有一个可数的、局部有限的加细开覆盖 $\Sigma_0 = \{V_i | 1 \leq i < \infty, i \in \mathbb{N}^+\}$, 以及定义在 X 上的一簇光滑函数

$$\{f_i \in C^\infty(X) | 1 \leq i < \infty, i \in \mathbb{N}^+\}$$

使得 $0 \leq f_i \leq 1$, $Supp f_i$ 是包含在 V_i 内的紧致子集, 并且 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \equiv 1$ 。

定理证毕。

3 凸体中函数的单位分解性

对于一个实数域 \mathbb{R} 上 n 维线性空间 X 的任意紧子集 A , 对于任意 $x \in A$, 点 x 的球形邻域组成了 A 的一个开覆盖, 又由 A 是紧的, 则存在有限个球形邻域组成的开覆盖, 设为 $B(x_i, \varepsilon_i), i=1, 2, \dots, s$, 其中 $s \in \mathbb{N}^+$ 。由定理 2.1 可知, 对于每一个 $B(x_i, \varepsilon_i)$, 都与局部有限的开覆盖 Σ_0 中有限个成员相交, 故存在有限个定义在 X 上的上节定理 2.1 中所描述的光滑函数, 使得这些光滑函数在 $B(x_i, \varepsilon_i)$ 上函数值求和等于 1。故存在有限个定义在紧子集 A 上的光滑函数, 设为 $g_1, g_2, \dots, g_s \in C^\infty(A)$, 满足 $\sum_{i=1}^s g_i \equiv 1$ 和 $0 \leq g_i \leq 1$, 其中 $s \in \mathbb{N}^+$ 。

对于有限个满足单位分解的函数, 提出一个问题, 如问题 1 所示。

问题 1: 对于线性空间 X 中的紧子集 A , 对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 是否存在 n 个定义在 A 上的连续函数 $g_1, g_2, \dots, g_n \in C(A)$, 满足 $\sum_{i=1}^n g_i \equiv 1, 0 \leq g_i \leq 1$ 且对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $x_i \in A$, 使得 $g_i(x_i) = a$, 其中 $i=1, 2, \dots, n$ 。

目前, 当 $n=2$ 时, 可以构造两个连续函数, 使问题 1 成立。事实上, 设 h 是定义在紧子集 A 上的任意有界连续函数, 令 $M = \max\{h(x) | x \in \bar{A}\}, m = \min\{h(x) | x \in \bar{A}\}$, 构造函数

$$g_1 = \frac{h}{M-m} - \frac{m}{M-m}, g_2 = 1 - g_1 = \frac{M}{M-m} - \frac{h}{M-m},$$

显然, $g_1, g_2 \in C(A)$, 满足 $g_1 + g_2 \equiv 1, 0 \leq g_1, g_2 \leq 1$ 且对于任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $x_i \in A$, 使得 $g_i(x_i) = a$, 其中 $i=1, 2$ 。这里, 符号 \bar{A} 表示集合 A 的闭包。

但对于 $n=3$, 这种构造方法构造的三个连续函数, 不一定使问题1成立。事实上, 对于定义在紧子集 A 上的任意有界函数 h_1, h_2 , 令 $M_i = \max\{h_i(x) | x \in \bar{A}\}$, $m_i = \min\{h_i(x) | x \in \bar{A}\}$, 其中 $i=1, 2$ 。构造函数

$$g_i = \frac{h_i}{M_i - m_i} - \frac{m_i}{M_i - m_i}$$

显然, $g_i \in C(A)$, 满足 $0 \leq g_i \leq 1$ 且对于任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $x_i \in A$, 使得 $g_i(x_i) = a$, 其中 $i=1, 2$ 。设 $g_2 = 1 - g_1 - g_2$, 显然 $g_1 + g_2 + g_3 \equiv 1$, 但很难确定, 对于任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $x_i \in A$, 使得 $g_3(x_i) = a$ 。这是因为取 $A = (0, \pi/2)$, 存在函数

$$g_1(x) = \sin x, g_2(x) = \cos x, g_3(x) = 1 - \sin x - \cos x,$$

满足 $g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) \equiv 1$, 显然 $g_1(x), g_2(x)$ 在 $(0, \pi/2)$ 上的值域为 $(0, 1)$, 但

$$g_3(x) = 2 \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) < 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)。$$

线性空间 X 中凸体的相关定义如下:

对于集合 $A \subset X$, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 若 $tA + (1-t)A \subset A$, 换言之, 对于任意 $x \in A, y \in A$, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 满足 $tx + (1-t)y \in A$, 称集合 A 为凸集。若集合 $A \subset X$ 是内部非空的紧凸集, 称集合 A 为凸体。若凸体 $A \subset X$ 是开集, 称集合 A 为开凸体。显然了, 开凸体 A 是 X 的有界子集。

现在考虑2维线性空间 X , 由于 X 与平面 \mathbb{R}^2 同构, 故只需证明在平面 \mathbb{R}^2 存在3个连续函数使问题1成立。为了便于叙述, 取平面 \mathbb{R}^2 的一组基底为 $\{\eta_1, \eta_2\}$, 其中 $\eta_1 = (1, 0), \eta_2 = (0, 1)$ 。在平面 \mathbb{R}^2 上, 对于任意 $a \subset \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}^2, V_a^2(a)$ 是以 a 为圆心, 以 a 为半径的开圆面。 $S_a^2(a)$ 是以 a 为圆心, 以 a 为半径的圆, 不失一般性, 为了全文符号使用的统一, 仍使用此符号表示平面 \mathbb{R}^2 中的开圆面和圆。

对于平面 \mathbb{R}^2 , 通过构造一种特殊的开覆盖, 应用线性空间 X 的单位分解定理2.1, 证明了在一个开凸体 A 上存在3个连续函数 $g_1, g_2, g_3 \in C(A)$, 满足 $g_1 + g_2 + g_3 \equiv 1, 0 \leq g_i \leq 1$ 且对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $x_i \in A$, 使得 $g_i(x_i) = a$, 其中 $i=1, 2, 3$ 。这样就确定了 $n=3$ 时, 对于平面 \mathbb{R}^2 的开凸体 A , 问题1成立。然后, 利用平面 \mathbb{R}^2 中的任意两开凸体 A, B 同胚, 证明了对于任意开凸体 A , 问题1成立。

引理3.1^[12] 对于任意集合 $A, B \subset \mathbb{R}^2$ 若 A, B 是开

凸体, 则 A 与 B 同胚。

易知, 在开凸体 A 与 B 之间, 存在的同胚映射 $\varphi(x)$ 是一个光滑映射。

定理3.1 对于平面 \mathbb{R}^2 上的任意开凸体 A , 存在定义在 A 上的3个连续函数 $g_1, g_2, g_3 \in C(A)$, 满足 $\sum_{i=1}^3 g_i \equiv 1, 0 \leq g_i \leq 1$ 且对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $x_i \in A$, 使得 $g_i(x_i) = a$, 其中 $i=1, 2, 3$ 。

证明 (1) 在平面 \mathbb{R}^2 上构造一个开凸体 $\text{int}\Omega$ 满足定理结论。

现在构造平面 \mathbb{R}^2 的一种特殊的可数开覆盖, 如图3所示, 表示为 $\Sigma = \{U_i | 1 \leq i < \infty\}$, 规定符号 $\text{int}S$ 表示集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ 的内部, 设 $\triangle ABC$ 是一个边长为1等边三角形, $\triangle ABC$ 的中心为点 O , 则

$$|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = \frac{\sqrt{3}}{3}, |OM| = |ON| = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}。$$

取 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1} < |OQ| < \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} < |OP_2| < \frac{2\sqrt{3}}{3}, |OP_3| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 和 $|OP_i| > |OP_{i-1}|$, 且 $|OP_i| \in \mathbb{Q}^+$, 这里 $i \geq 4$, 且 $i \in \mathbb{N}^+$ 。定义

$$U_1 = \text{int}(\triangle ABC), U_2 = V_a^2(A), U_3 = V_a^2(B), U_4 = V_a^2(C)$$

和当 $i \geq 5$, 且 $i \in \mathbb{N}^+$ 时, $U_i = \{S_b^{n-1}(O) | |OP_{i-4}| < b < |OP_{i-2}|\}$ 。易知, $\mathbb{R}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} U_i$, 并且对于任意的正整数 i, U_i 都是开集。事实上, (a) 显然, U_1, U_2, U_3 和 U_4 是开集。(b) 当 $i \geq 5$, 且 $i \in \mathbb{N}^+$ 时, 任取 $X \in U_i = \{S_b^{n-1}(O) | |OP_{i-4}| < b < |OP_{i-2}|\}$, 则 $|OP_{i-4}| < |OX| < |OP_{i-2}|$, 取 $\varepsilon = \frac{|OX| - |OP_{i-4}|}{2}$, 于是有球形邻域 $B(X, \varepsilon) \subset U_i$, 故由开集定义可得, U_i 是开集。

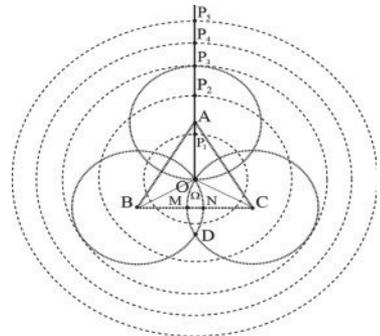


图3 平面 \mathbb{R}^2 的一个可数开覆盖

因此, $\Sigma = \{U_i | 1 \leq i < \infty\}$ 是平面 \mathbb{R}^2 的一个可数开覆盖。又因为对可数开覆盖 Σ 进行适当收缩, 如文献[1]中第66页的单位分解定理证明过程可知, 可以构造一个可数的、局部有限的加细开覆盖 $\Sigma_0 = \{V_i | 1 \leq i < \infty\}$, 并且满足 $V_i \subset U_i$ 。根据定理2.1, 更进一步有, 存在定义在 \mathbb{R}^2 上的一簇光滑函数

$$\{f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2) | 1 \leq i < \infty, i \in \mathbb{N}^+\},$$

使得 $0 \leq f_i \leq 1, \text{Supp } f_i$ 是包含在 V_i 内的紧致子集, 并且 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \equiv 1$ 。

根据 $\Sigma = \{U_i | 1 \leq i < \infty\}$ 是平面 \mathbb{R}^2 的一个可数开覆盖,

设区域 $\Omega = U_1 \cap U_3 \cap U_4$, 显然, 区域 Ω 不是一个开集, 也不是一个闭集, 曲线段 OM 和 ON , 以及直线段 MN 是区域 Ω 的边界, 但点 $O, M, N \in \Omega$ 。由开覆盖 $\Sigma_0 = \{V_i | 1 \leq i < \infty\}$ 的结构可得,

- $O \in V_1$, 且 $O \notin V_i$, 其中 $i \in \mathbb{N}^+, i \neq 1$,
- $M \in V_3$, 且 $M \notin V_i$, 其中 $i \in \mathbb{N}^+, i \neq 3$,
- $N \in V_4$, 且 $N \notin V_i$, 其中 $i \in \mathbb{N}^+, i \neq 4$,

又因为 $\text{Supp } f_i \subset V_i \subset U_i, i=1, 3, 4$ 所以 $f_1(O)=1, f_3(M)=1$ 和 $f_4(N)=1$, 且

$$f_1(MN) \equiv 0, f_3(\widehat{ON}) \equiv 0 \text{ 和 } f_4(\widehat{OM}) \equiv 0。$$

显然, f_i 在 $\text{int}\Omega$ 上也是光滑函数, 且 $0 \leq f_i(\text{int}\Omega) \leq 1$ 。现在验证对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $x \in A$, 使得 $f_i(x) = a$ 事实上, f_i 在 $\text{int}\Omega$ 上的函数值不恒等于 0 或 1。根据 f_i 在 $\text{int}\Omega$ 上是光滑函数, 知 f_i 在 $\text{int}\Omega$ 上也是连续函数, 若 $f_i(\text{int}\Omega) \equiv 0$ 时, 则对任意 $x \in \text{int}\Omega$, 有 $\lim_{x \rightarrow O} f_i(x) = 0$, 这与 $f_i(O) = 1$ 相矛盾; 若 $f_i(\text{int}\Omega) \equiv 1$ 时, 在直线 MN 任取一点 W , 则 $f_i(W) \equiv 0$, 又因为, 对任意 $x \in \text{int}\Omega$, 有 $\lim_{x \rightarrow W} f_i(x) = 1$, 这与 $f_i(W) = 0$ 相矛盾。于是, 对任意 $a \in (0, 1)$, 必存在 $x \in A$, 使得 $f_i(x) = a$, 否则, f_i 在 $\text{int}\Omega$ 上不是连续函数。

同理, f_3, f_4 在 $\text{int}\Omega$ 上也是光滑函数, $0 \leq f_i(\text{int}\Omega), f_i(\text{int}\Omega) \leq 1$ 且对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $\alpha, \beta \in A$, 使得 $f_3(\alpha) = f_4(\beta) = a$ 。

由开覆盖 $\Sigma_0 = \{V_i | 1 \leq i < \infty\}$ 的结构, 易知, $\text{int}\Omega \cap V_i \neq \emptyset$, 其中 $i=1, 3, 4$, 但若 $i \in \mathbb{N}^+$ 且 $i \neq 1, 3, 4$, 有 $\text{int}\Omega \cap V_i \neq \emptyset$ 和 $f_i(\text{int}\Omega) \equiv 0$ 。所以,

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(\text{int}\Omega) = f_1(\text{int}\Omega) + f_3(\text{int}\Omega) + f_4(\text{int}\Omega) \equiv 1$$

在 $\text{int}\Omega$ 上定义新函数

$$g_1 = f_1|_{\text{int}\Omega} : \text{int}\Omega \rightarrow [0, 1],$$

$$g_2 = f_3|_{\text{int}\Omega} : \text{int}\Omega \rightarrow [0, 1],$$

$$g_3 = f_4|_{\text{int}\Omega} : \text{int}\Omega \rightarrow [0, 1],$$

则 $g_1, g_2, \dots, g_i \in C^\infty(\text{int}\Omega)$, 满足

$$\sum_{i=1}^3 g_i(\text{int}\Omega) = f_1(\text{int}\Omega) + f_3(\text{int}\Omega) + f_4(\text{int}\Omega) \equiv 1$$

$0 \leq g_i \leq 1$, 且对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $x_i \in A$, 使得 $g_i(x_i) = a$, 其中 $i=1, 2, 3$ 。

由开凸体的定义得, $\text{int}\Omega$ 是一个开凸体。综上所述, 对于开凸体 $\text{int}\Omega$, 定理结论成立。

(2) 证明在平面 \mathbb{R}^2 上任意开凸体 A 满足定理结论。

由引理 3.1 可得, 在开凸体 A 与 $\text{int}\Omega$ 同胚, 即存在同胚映射 $y = \varphi(x) : A \rightarrow \text{int}\Omega$, 则映射 φ 是一个连续映射。在开凸体 A 上定义函数

$$y = G_i(x) = g_i(\varphi(x)) : A \rightarrow \mathbb{R}, i=1, 2, 3,$$

易知, $\sum_{i=1}^3 G_i(A) = \sum_{i=1}^3 g_i(\varphi(A)) = \sum_{i=1}^3 g_i(\text{int}\Omega) \equiv 1$ 。根据复合函数的连续性可得, $y = G_i(x) = g_i(\varphi(x))$ 是一个连续函数, 即 $G_i \in C(A)$ 。现在验证对 $i=1, 2, 3, 0 \leq G_i(x) \leq 1$ 且对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $a \in A$, 使得 $G_i(a) = a$, 事实上, 对 $x \in A$ 于是有 $\varphi(x) \in \text{int}\Omega$, 则 $0 \leq g_i(\varphi(x)) \leq 1$, 所以 $0 \leq G_i(x) \leq 1$; 又因为对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $\beta \in \text{int}\Omega$, 使得 $g_i(a) = a$, 根据开凸体 A 与 $\text{int}\Omega$ 同胚得, 存在 $a \in A$, 使得 $\varphi(a) = \beta$, 于是有 $G_i(a) = g_i(\varphi(a)) = a$ 。

在开凸体 A 上定义新函数 $g_i \in G_i, i=1, 2, 3$ 。综上所述, 存在定义在开凸体 A 上的连续函数 $g_1, g_2, g_3 \in C(A)$, 满足 $\sum_{i=1}^3 g_i \equiv 1, 0 \leq g_i \leq 1$ 且对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $x_i \in A$, 使得 $g_i(x_i) = a$, 其中 $i=1, 2, 3$ 。

定理证毕。

参考文献:

- [1] KADETS V, MARTIN M. Extension of Isometries Between Unit Spheres of Finite-dimensional Polyhedral Banach Spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 396: 411-477.
- [2] DING G G, LI J Z. Sharp Corner Points and Isometries Extension Problem in Banach Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 405: 297-309.
- [3] 定光柱. 等距线性延拓问题[J]. 中国科学: 数学, 2015, 45(1): 1-8.
- [4] HAO C, WU S. Homogeneity of Isosceles Orthogonality and Related Inequalities[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2011, 84: 1-9.
- [5] 吴森林, 郭伟. 毕达哥拉斯正交的齐次方向和相关不等式[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2013, 18(5): 115-118.
- [6] 王麟, 董新建. 赋范线性空间中的弧长正交[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2013, 19(2): 106-110.
- [7] 孔亮. 实赋范线性空间中的近似平方 R-正交[J]. 纺织高校基础科学学报, 2015, 28(1): 58-61, 71.
- [8] ZHOU J W. Spinors, Calibrations and Grassmannians [J]. Tsukuba Journal of Mathematics, 2003, 27: 77-97.
- [9] ZHOU J W, HUANG H. Geometry on Grassmann Manifolds G(2,8) and G(3,8)[J]. Mathematics Journal of Okayama University, 2002(44): 171-179.
- [10] 史进, 陈静文. Grassmann 流形 $G(2, N)$ 的同调群[J]. 苏州大学学报(自然科学版), 2010, 26(2): 16-19.
- [11] 陈维恒. 微分流形初步[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2001: 54-69.

表2 DGM(1,1)模型性能检验表

序号	原始数据/mm	DGM(1,1)模拟/mm	残差/mm	相对误差/%
1	2.03	2.03	0	0
2	2.19	2.26	-0.07	3.2
3	2.41	2.39	0.02	0.83
4	2.38	2.53	-0.01	0.4
5	2.78	2.67	0.11	3.96
6	2.82	2.83	-0.01	0.35
7	2.99	2.99	0	0
8	3.12	3.16	-0.04	1.28
平均相对模拟误差/%			1.43	

期沉降观测的累积沉降量预测值为3.34 mm,第十期为3.53 mm。

3.3 性能检验

还原值即为DGM(1,1)模型模拟各期沉降观测的累积沉降量,性能检验参数结果见表2。不难发现,各期沉降观测累积沉降量模拟值误差均较小,且

越到后期精度越高。平均相对模拟误差满足精度等级二级要求。预测结果较好,有较强的适用性。

4 结语

变形预测建模方法种类较多,各有特点。针对高层建筑物沉降观测序列“小样本,信息量少”的特点,灰色理论能充分挖掘观测数据的信息,寻找其变化的客观规律,在此基础上实现对后期施工或使用过程中沉降变化的预测。另外,灰色理论具有建模简单、运算量小、操作简单等有点。从根本上讲,GM(1,1)模型是指数函数模型,要求模拟和预测的序列近似呈指数规律变化。但建筑物的沉降受地质、结构形式和外界环境等因素的影响致使GM(1,1)在实际预测时往往会产生一些偏差,缺乏稳定性。DGM(1,1)能实现对序列的无偏模拟。试验结果表明,DGM(1,1)模型用于建筑物沉降预测具有可行性,且效果较好。

参考文献:

[1] 中华人民共和国住房和城乡建设部.建筑变形测量规范(JGJ 8—2016)[M].北京:中国建筑工业出版社,2016.

[2] 于涛,赵仲荣.建筑物沉降规律的曲线拟合模型研究[J].测绘通报,2008(11):50-52.

[3] 陈伟清.回归分析在建筑沉降变形分析中的应用[J].测绘学院学报,2005,22(4):249-251.

[4] 张文博,郭云开.基于BP神经网络的建筑物沉降预测模型研究[J].测绘工程,2013,22(2):52-56.

[5] 吴秀明,迟道才,潘香岑,等.基于离散型灰色DGM(1,1)预测模型在涝灾预测中的应用[J].沈阳农业大学学报,2013,44(1):104-107.

[6] 张珊玉,徐辉.基于离散型灰色DGM(1,1)模型的房地产价格预测及其对策研究[J].科技广场,2013(1):228-234.

[7] 刘思峰,邓聚龙.GM(1,1)模型的适用范围[J].系统工程理论与实践,2000(5):121-124.

[8] 谢乃明,刘思峰.离散DGM(1,1)模型与灰色预测模型建模机理[J].系统工程理论与实践,2005(1):93-99.

[9] 曾波.实用灰色预测建模方法及其MATLAB程序实现[M].北京:科学出版社,2018.

[10] 杨晓平.工程监测技术及应用[M].北京:中国电力出版社,2007.

(责任编辑:曲继鹏)

(上接第56页)

[12] 熊金诚.点集拓扑学[M].3版.北京:高等教育出版社,2003:33,60,79-81,140.

[13] MAULDIN R. D,WILLIAMS S. C. On the Hausdorff Dimension of Some Graphs[J]. Transactions American Mathematical Society,1986,298:793-803.

[14] WINGREN P. Dimensions of Graphs of Functions and Lacunary Decompositions of Spline Approximations[J]. Real Analysis Exchange,2000,27(4):913-916.

[15] LIU J, WU J.A remark on Decomposition of Graph of Continuous Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2013,401:404-406.

[16] 刘佳,孙钰.连续函数的图像的分解[J].应用数学,2014,27(4):913-916.

(责任编辑:曲继鹏)