

“和差化积”在抽象矩阵运算中的应用

郭竹梅

(安徽科技学院信息与网络工程学院,安徽 凤阳 233100)

摘要:抽象矩阵的运算是线性代数考研题中常见的一种题型,但由于抽象矩阵的具体元素未知,所以只能综合运用矩阵的性质来计算。在矩阵乘积的运算中, $|AB|=|A||B|$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 等性质可以大大简化运算。但在矩阵的和差运算中,由于 $|A+B| \neq |A|+|B|$, $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$, 因此必须把和差转化为乘积,即“和差化积”,从两个方面说明“和差化积”的应用。

关键词:和差化积;抽象矩阵;运算

中图分类号:O151.21 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-1891(2018)02-0054-02

Applications of the Product to Sum in the Abstract Matrix

GUO Zhu-mei

(College of Information and Network Engineering, Anhui Science and Technology University,
Fengyang, Anhui 233100, China)

Abstract: In Linear Algebra, the computation of abstract matrix is important. For the abstract matrix, we must use the properties of matrix because the exact elements are unknown. In Matrix product, the properties of matrices can simplify operations, so we can translate the sum difference of the matrix into matrix product. In this paper, the author explains this application from two aspects.

Keywords: product to sum; abstract matrix; applications

矩阵在线性代数中具有举足轻重的地位,矩阵的运算更是当代大学生必须熟练掌握的运算。“和差化积”是抽象矩阵运算中的常用手段,它可以大大简化抽象矩阵的运算,下面从两个方面来说明“和差化积”在线性代数中的应用。

1 抽象矩阵的行列式

此类题目经常采用矩阵的运算性质和某个矩阵左乘或右乘一单位矩阵把“矩阵和差”化为“矩阵乘积”,见下面的例1,例2。

例1^[1] 设 A, B 为3阶方阵,且 $|A|=3$, $|B|=2$, $|A^{-1}+B|=2$,求: $|A+B^{-1}|$ 。

解:由矩阵的运算性质可得, $A+B^{-1}=A(A^{-1}+B)B^{-1}$,

从而 $|A+B^{-1}|=|A(A^{-1}+B)B^{-1}|=|A| \cdot |A^{-1}+B| \cdot |B^{-1}|=3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}=3$

例2^[2] 设 A 为 n 阶方阵, n 为奇数,且 $AA^T=E_n$, $|A|=1$ 求 $|A-E_n|$ 。

解:由于 $|A-E_n|=|A-AA^T|=|AE_n-AA^T|=|A(E_n-A^T)|=|A(E_n^T-A^T)|=|A(E_n-A^T)|=|A| \cdot |(E_n-A^T)|=|A| \cdot |E_n-A|=|E_n-A|$

$|E_n-A|=(-1)^n|A-E_n|=(-1)^n|A-E_n|$ (n 为奇数),

所以 $2|A-E_n|=0$, 从而 $|A-E_n|=0$ 。

二、抽象矩阵的逆矩阵

此类题目经常采用“因式分解”或左乘和右乘单位矩阵的技巧把“矩阵和差”化为“矩阵乘积”,见下面的例3,例4。

例3 设 n 阶矩阵 A 满足 $2A(A-E_n)=3A^3$, 证明: E_n-A 可逆,并求 $(E_n-A)^{-1}$ 。

证明:由 $2A(A-E_n)=3A^3$ 可得, $3A^3-2A^2+2A=0$, 从而有 $3A^3-2A^2+2A=(A-E_n)(3A^2+A+3E_n)+3E_n=0$, 即 $(A-E_n)(3A^2+A+3E_n)=-3E_n$ 从而 $(E_n-A)(\frac{3A^2+A+3E_n}{3})=E_n$,

所以 E_n-A 可逆,且 $(E_n-A)^{-1}=\frac{3A^2+A+3E_n}{3}$

例4 设 n 阶矩阵 $A, B, AB-E$ 为可逆矩阵,证明: (1) $A^{-1}-B$ 可逆,并求其逆; (2) $(A^{-1}-B)^{-1}+B^{-1}$ 可逆,并求其逆。

证明: (1) 由于 $A^{-1}-B=A^{-1}E-EB=A^{-1}E-A^{-1}AB=A^{-1}(E-AB)$,

又 $AB - E$ 可逆, 所以 $E - AB$ 可逆, 从而 $A^{-1} - B$ 可逆, 且 $(A^{-1} - B)^{-1} = (E - AB)^{-1}A$ 。

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由于 } (A^{-1} - B)^{-1} + B^{-1} &= (A^{-1} - B)^{-1}E + (A^{-1} - B)^{-1}(A^{-1} - B)B^{-1} \\ &= (A^{-1} - B)^{-1}[E + (A^{-1} - B)B^{-1}] = (A^{-1} - B)^{-1}[E + (A^{-1} - B)B^{-1}] \\ &= (A^{-1} - B)^{-1}[E + A^{-1}B^{-1} - E] = (A^{-1} - B)^{-1}A^{-1}B^{-1} \\ &= [BA(A^{-1} - B)]^{-1} = [BA(A^{-1} - B)]^{-1} = [B(E - AB)]^{-1} \end{aligned}$$

所以, $(A^{-1} - B)^{-1} + B^{-1}$ 可逆, 且 $[(A^{-1} - B)^{-1} + B^{-1}]^{-1} = B(E - AB)$ 。

上述给出了“和差化积”在抽象矩阵行列式和逆矩阵中的应用, 事实上, 这两方面的综合题目也可以用“和差化积”来解决, 见下面的例5, 例6。

例5 设 n 阶矩阵 A 和 B 满足 $A^2 = E_n, B^2 = E_n, |A| + |B| = 0$ 证明: $|A + B| = 0$ 。

证明: 由 $A^2 = E_n, B^2 = E_n, |A| + |B| = 0$ 可得,

$$A^{-1} = A, B^{-1} = B, |A| = -|B|, |A|^2 = 1$$

$$\text{又 } A + B = AE_n + E_n B = AB^{-1}B + AA^{-1}B = A(B^{-1} + A^{-1})B,$$

带入 $A^{-1} = A, B^{-1} = B, |A| = -|B|, |A|^2 = 1$, 可得

$$|A + B| = |A(B^{-1} + A^{-1})B| = |A(B + A)B| = |A||A + B||B| = -|A|^2|A + B| = -|A + B|,$$

所以有 $|A + B| = 0$ 。

参考文献:

- [1] 同济大学数学系. 线性代数 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2017: 65.
- [2] 吴赣昌. 线性代数: 经管类 [M]. 4版. 北京: 中国人民大学出版社, 2011: 79.

例6 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且满足 $A^2 - 3A = 0, R(A) = k$, 求 $|A + 2E|$ 。

解: 由 $A^2 - 3A = 0$ 可得 A 的特征值只能是 0 或 3,

又 A 是 n 阶实对称矩阵且 $R(A) = k$, 所以 A 与 n 阶对角矩阵 Λ 相似, 且 $R(\Lambda) = k$,

从而 3 是 A 的 k 重特征值, 0 是 A 的 $n - k$ 重特征值, 即存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 3E_k & 0 \\ 0 & 0_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } |A + 2E| = |P\Lambda P^{-1} + 2E| = |P(\Lambda + 2E)P^{-1}| = |\Lambda + 2E| = \begin{vmatrix} 5E_k & 0 \\ 0 & 2E_{n-k} \end{vmatrix} = 5^k \cdot 2^{n-k}$$

3 结语

对于抽象矩阵的运算, “和差化积”是一种非常有效的方法。从上述例题可以看出, 通过矩阵的性质对算式进行恒等变形、“因式分解”、左乘或右乘单位矩阵等技巧可以大大简化抽象矩阵的运算。因此, 教师在教学过程中应引导学生从抽象的高度去解决问题, 以达到培养学生发散思维的目的。

(责任编辑: 曲继鹏)