浅析微积分在不等式证明中的应用*

张宗标,耿 涛,冯依虎
(亳州师范高等专科学校,安徽 亳州 236800)

【摘 要】对利用微积分的有关知识证明不等式的方法作了初步研究,给出了不等式证明的几种实用有效的方法。

【关键词】凹凸性;单调性;积分性质;极值
【中图分类号】O13 【文献标志码】A 【文章编号】1673-1891(2015)04-0016-03

不等式的证明方法很多,本文主要利用高等数学的有关知识从函数这个角度来研究证明不等式的几种方法。

1 利用函数的凹凸性证明不等式

定义1:设 f 为定义在区间 I 上的函数,若对 I 上任意两点 $x_1<x_2$ 和实数 $\lambda\in(0,1)$ 总有 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$,则称 f 为 I 上的凸函数。

定理1[1]:设 f 为 I 上的二阶可导函数,则 f 为 I 上凸函数的充要条件是在 I 上 $f''(x)\ge0$。

例1:应用凸函数概念证明不等式:对任意 $a,b\in R$,有 $e^{\frac{a+b}{2}}\le\frac{1}{2}(e^a+e^b)$

证明:设 $f(x)=e^x$,对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f''(x)=e^x>0$,根据定理1,$f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上凸函数,从而对

$x_1=a,x_2=b,\lambda=\frac{1}{2}$ 有

$$f\left(\frac{1}{2}x_1+\left(1-\frac{1}{2}\right)x_2\right)\le\frac{1}{2}f(x_1)+\left(1-\frac{1}{2}\right)f(x_2)$$

即

$$e^{\frac{a+b}{2}}\le\frac{1}{2}(e^a+e^b)$$

定理2[2]:(Jensen 不等式)若 f 为 $[a,b]$ 上凸函数,对任意 $x_i\in[a,b]$,且 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,则 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\qquad(1)$$

证明:应用数学归纳法,当 $n=2$ 时,由定义命题显然成立,设 $n=k$ 时命题成立,即对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in[a,b]$ 及 $\alpha_i>0\ (i=1,2,\cdots,k)$,$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$ 都有 $f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i)$,现在证明 $n=k+1$ 时命题也成立,设 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}\in[a,b]$ 及 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,k,k+1)$,$\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$,令

$$\alpha_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}},(i=1,2,\cdots,k)$$

并依次应用 $n=2$ 和 $n=k$ 时的结论,可推得

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots\lambda_kx_k+\lambda_{k+1}x_{k+1})=f\left((1-\lambda_{k+1})\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_kx_k}{1-\lambda_{k+1}}+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)$$

$$\le(1-\lambda_{k+1})f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}x_1+\frac{\lambda_2}{1-\lambda_{k+1}}x_2+\cdots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}x_k\right)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$$

$$=(1-\lambda_{k+1})f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_kx_k)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$$

$$\le(1-\lambda_{k+1})[\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_kf(x_k)]+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$$

$$=(1-\lambda_{k+1})\left[\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}f(x_1)+\frac{\lambda_2}{1-\lambda_{k+1}}f(x_2)+\cdots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}f(x_k)\right]+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_if(x_i)$$

这就证得对任何自然数 n,凸函数 f 总有(1)式成立。

例2:证明:对任意 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 恒成立 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

即算术平均值不小于几何平均值。

证明:令 $f(x)=-\ln x$,则 $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0,x\in(0,+\infty)$,由Jensen不等式有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-\ln x_k)\ge-\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}\right)$$

即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln x_k)\le\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}\right)$$

从而 $\ln(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\le\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$,故

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

例3.设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导,且 $f''(x)>0$,证明 $\int_0^1 f(x^n)dx\le f\left(\frac{1}{n+1}\right)$,为自然数。

证明:因为 $f''(x)<0$,所以 $f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n\right)\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\left(\frac{k}{n}\right)^n\right)$,

收稿日期:2015-09-01
*基金项目:安徽省教育厅重点自然科学基金项目(KJ2015A347),安徽省教育厅自然科学基金项目(KJ2013Z217,KJ2013Z218),亳州师专科研课题(BZKY201425),亳州师专重点课程项目(高等数学)。

作者简介:张宗标(1981-),男,安徽砀山人,副教授,硕士,研究方向:高等数学。

又 f 在 $[0,1]$ 上可导,所以 f 在 $[0,1]$ 上可积其连续。在上式中令 $n\to\infty$,则得 $f(\int_0^1 x^n dx)\ge\int_0^1 f(x^n)dx$,即

$$\int_0^1 f(x^n)dx\le f(\int_0^1 x^n dx)=f(\frac{1}{n+1}),(n\in N)$$

将例3进行推广可得到。

例4. 证明:若 φ 在 $[0,a]$ 上连续,f 处处二阶可导,且 $f''(x)\ge 0$,则有

$$\frac{1}{a}\int_0^1 f[\varphi(t)]dt\ge f[\frac{1}{a}\int_0^1\varphi(t)dt]$$

证明: 设 T 为 $[0,a]$ 上的一个分割,其分点为 $\frac{a_k}{n}$,$k=0,1,\cdots,n$,即 $x_k=\frac{a_k}{n}$,由 $f''(x)\ge 0$ 知 f 是凸函数,故在 $Jensen$ 不等式中令 $\lambda=\frac{1}{n}$,则有

$$f\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\varphi(x_k)\right)\le\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}f\left(\varphi(x_k)\right)$$

即 $f\left(\frac{1}{a}\sum_{k=1}^n\varphi(x_k)\frac{a}{n}\right)\le\frac{1}{a}\sum_{k=1}^n f\left(\varphi(x_k)\right)\frac{a}{n}$,由于 f 和 φ 在 $[a,b]$ 上都可积,且 f 连续,故在上式中令 $n\to\infty$,则得 $f[\frac{1}{a}\int_0^1\varphi(t)dt]\le\frac{1}{a}\int_0^1 f[\varphi(t)]dt$。

2 利用中值定理证明不等式

定理3[3]:($Lagrange$ 中值定理)若函数 f 满足如下条件:

(i) f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续　　(ii) f 在开区间 (a,b) 内可导

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明: 作辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$,显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,而且 $F(a)=F(b)$,于是由 $Rolle$ 中值定理知,存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\ 即\ f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

例5[4]:证明不等式 $\frac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h$ 对一切 $h>-1,h\ne 0$ 成立。

证明: 令 $f(x)=\ln x$,在 $[1,1+h]$ $(h>-1)$ 上运用 $Lagrange$ 中值定理,$\exists 0<\theta<1$,使得

$$\ln(1+h)=\ln(1+h)-\ln 1=\frac{h}{1+\theta h},0<\theta<1\qquad(2)$$

当 $h>0$ 时,由 $0<\theta<1$ 可得

$$1<1+\theta h<1+h\ 及\ \frac{h}{1+h}<\frac{h}{1+\theta h}<h\qquad(3)$$

当 $-1<h<0$ 时,由 $0<\theta<1$ 可得 $1>1+\theta h>1+h>0$,由于 $h<0$,这时也能推得(3)式成立,将(2)式代入(3)式就得到所要证明的结论。

例6. 证明:设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,$f(x)$ 在 $x=b$ 连续,则当 $f'(x)\ge 0$ 时,对一切 $x\in(a,b)$ 有 $f(x)\le f(b)$,当 $f'(x)\le 0$ 时,对一切 $x\in(a,b)$ 有 $f(x)\ge f(b)$。

证明: 对任意 $x\in(a,b)$,由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,在 $x=b$ 连续,得 $f(x)$ 在 $[x,b]$ 上连续,在 (x,b) 内可导,由中值定理得:

$$f(b)-f(x)=f'(\xi)(b-x),\xi\in(x,b)$$

由于 $b-x>0$,且 $f'(\xi)\ge 0$,故 $f(b)-f(x)\ge 0$,因此对一切 $x\in(a,b)$ 有 $f(x)\le f(b)$,同理可证当 $f'(x)\le 0$ $(a<x<b)$ 时,对一切 $x\in(a,b)$ 有 $f(x)\ge f(b)$。

3 利用函数的单调性证明不等式

定义2: 设 $f(x)$ 为定义在 D 上的函数,若对于 D 中任意两个数 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)\le(\ge)f(x_2)$,则称 $f(x)$ 为 D 上递增(递减)函数。

定理4[5]:若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内递增(减)的充要条件是 $f'(x)\ge(\le)0$。

推论:设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,若 $f'(x)>(<)0$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格递增(严格递减)。

例7. 证明:$x>0$ 时,$x>\ln(1+x)$。

证明: 设 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 由于当 $x>0$ 时,有 $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$,又由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增,从而当 $x>0$ 时,有 $f(x)=x-\ln(1+x)>f(0)=0$,即 $x>\ln(1+x)$。

4 利用求极值的方法证明不等式

要点: 要证明 $f(x)\ge g(x)$,只要求函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的极值,证明 $\min F(x)\ge 0$,这是证明不等式的基本方法。

例8. 设 $a>\ln 2-1$ 为任一常数,试证:当 $x\ge 0$ 时,$x^2-2ax+1<e^x$。

证明: 令 $f(x)=e^x-x^2+2ax-1$,因 $f(0)=0$,要证 $f(x)>0$,只需证明 $f'(x)=e^x-2x+2a>0$ 或 $\min_{x>0}f'(x)>0$ 即可。令 $f''(x)=e^x-2=0$ 得唯一稳定点 $x=\ln 2$,当 $x<\ln 2$ 时,$f''(x)<0$,当 $x>\ln 2$ 时,$f''(x)>0$,所以

$\min_{x>0}f'(x)=f'(\ln 2)=2-2\ln 2+2a=2(a+1-\ln 2)>0$,得证。

5 利用定积分的基本性质证明不等式

定理5[6]:设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的2个可积函数,若 $f(x)\le g(x)$,$x\in[a,b]$,则 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$。

证明: 由于在 $[a,b]$ 上 $f(x)\le g(x)$,故对任一分割T,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的上和也有关系式 $S_f(T)\le S_g(T)$,从而对它们的上积分亦有 $S_f=\inf_T\{S_f(T)\}\le\inf_T\{S_g(T)\}=S_g$,由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,故有 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$。

例10. 证明下列不等式:

(1) $1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}$　　(2) $3\sqrt{e}<\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx<6$

证明: (1)由于 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$,$x\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以由定理5知

$$1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

（2）令 $\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}=0$ 得 $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 在 $[e,4e]$ 上驻点 $x=e^2$，所以在 $(e,4e)$ 上，$\frac{1}{\sqrt{e}}<\frac{\ln x}{\sqrt{x}}<\frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{e}$，从而由定理5知 $3\sqrt{e}=\int_e^{4e}\frac{1}{\sqrt{e}}dx<\int_e^{4e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx<\int_e^{4e}\frac{2}{e}dx=6$，证毕。

6 利用公式证明不等式

要点：若 $f(x)$ 在 (a,b) 上有连续 阶导数，且 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0, f^{n}(x)>0$，则 $f(x)=\frac{f^{n}(\xi)}{n!}(x-a)^n>0$，利用此原理可以证明一些不等式。

例 11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，$f''(x)<0$，试证：$\forall a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$，$k_i>0, \sum_{i=1}^{n}k_i=1$，有 $f\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right)>\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i)$。

证明：取 $x_0=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i$，将 $f(x_i)$ 在 $x=x_0$ 处展开，

$$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x_i-x_0)^2<f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0)$$

$(i=1,2,\cdots,n)$ 以 k_i 乘上式两端，然后将 n 个不等式相加，得 $\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i)<f(x_0)\sum_{i=1}^{n}k_i+f'(x_0)\sum_{i=1}^{n}k_i(x_i-x_0)$，而 $\sum_{i=1}^{n}k_i(x_i-x_0)=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i-x_0=0$，所以 $\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i)<f(x_0)=f\left(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\right)$，证毕。

注释及参考文献：

[1]许娟娟.微积分在不等式证明中的应用[J].佳木斯教育学院学报,2011,2(1):170-171,173.
[2]华东师范大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社,1991:246.
[3]陈天权.数学分析讲义[M].北京:北京大学出版社,2009:178.
[4]裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,2006:221.
[5]同济大学数学系.高等数学[M].北京:高等教育出版社,2007:146.
[6]复旦大学数学系.数学分析:上册[M].北京:人民教育出版社,1978:232.

Applications of Calculus in the Proof of Inequalities

ZHANG Zong-biao, GENG Tao, FENG YI-hu
(Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800)

Abstract: This paper, using the knowledge of differential calculus to prove inequality, gives some practical and effective methods about prove of the inequality.

Key words: concave convex; monotonic property; integral property; extreme value

DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.04.005

（上接第11页）

Application of Frequency Vibration Type Insecticidal Lamp in the Production of Greenhouse Vegetable in Xichang

WANG Yun-mei, LUO Xiao-ling, YANG Xin, FU Li-hui, HUANG Xiu-fen
(Xichang Agricultural Science Research Institute , Xichang, Sichuan 615000)

Abstract: Frequency trembler lamps in 4 greenhouse vegetable demonstration sites were killing 7 orders and 17 families 23 species, including 21 species of pests. The main pests have insecticidal effects harmful to vegetable, especially for lepidoptera pest control effect was significant. The results of the application show that the hanging area is higher than that of no light district of Spodoptera litura and beet armyworm larvae weight were reduced 84.10%, 74.49%, while reducing drug times, decreasing the cost of drug use, ensuring the safety of vegetables, pollution-free production, popularization and application in large area.

Key words: frequency vibration type insecticidal lamp; vegetable production; pest control

DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.04.003