第29卷第4期　　西昌学院学报·自然科学版　　Vol.29,NO.4
2015年12月　　Journal of Xichang College·Natural Science Edition　　Dec.,2015

有轴平面束定理的应用*

周　明[1],徐井海[2]
(1.亳州师范高等专科学校 教育学院,安徽 亳州 236800;2.阜阳技师学院 机械工程系,安徽 阜阳 236000)

【摘　要】平面束定理是解析几何中关于空间直线和平面部分的重要内容,有轴平面束定理对判定直线与平面的位置关系、两直线共面定理、直纹曲面的性质和平面方程的求法起着重要作用。

【关键词】平面束;方程;直纹曲面
【中图分类号】O182.2　【文献标志码】A　【文章编号】1673-1891(2015)04-0012-04

平面束是一种空间图形,满足某一条件的平面的集合称为平面束。空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束,那条直线叫做有轴平面束的轴[1]。平面束定理是解析几何中关于空间直线和平面部分的重要内容。而有轴平面束定理对判定直线与平面的位置关系、两直线共面和直纹曲面的性质起着重要作用。

1 有轴平面束定理

定理1[2] 如果两个平面

$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\pi_1: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

交于一条直线 l ,那么以直线 l 为轴的平面束的方程是

π: $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

其中 λ,μ 是不全为零的任意实数。

证明 只需证明一下三点:

(1) π 方程表示一个平面。

因为 π 的方程等价于

$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)+(\lambda D_1+\mu D_2)=0$ 。

显然 x, y, z 三实数不同时为零,否则得到 $A_1:B_1:C_1=A_2:B_2:C_2$ 与题设矛盾。所以, π 方程表示是一个平面。

(2)平面 π 经过直线 l 。

取 $M_0(x_0\quad y_0\quad z_0), M_0\in l,$ 从而点 M_0 坐标满足平面 π 的方程,所以平面 π 过直线 l 。

(3)经过直线 l 的平面都可以写成 π 方程的形式。

假设 π' 经过直线 l ,取 $M_0(x_0\quad y_0\quad z_0)$, ,使得 $M_0\in\pi$ 且 $M_0\notin l$ 。

设

$$\mu_0=A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1,$$
$$\lambda_0=A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2,$$

则 λ_0,μ_0 不全为零(否则 $M_0\in l$)。

于是平面 $\pi': \lambda_0(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu_0(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ 是经过直线 l ,且过 M_0 的平面。

2 有轴平面束的应用

2.1 判定两条直线共面

定理2[3]135-136 若两条直线

$$l_1:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases}A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0\end{cases}$$

则直线 l_1 与 l_2 共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}=0.$$

证明 经过直线 l_1 的平面 π_1 和经过直线 l_2 的平面 π_2 的方程分别是

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu_1(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$
$$\lambda_2(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+\mu_2(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0$$

其中 $\lambda_1^2+\mu_1^2\neq0, \lambda_2^2+\mu_2^2\neq0,$

从而

直线 l_1 与直线 l_2 共面 $\Leftrightarrow$ 存在 λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 为零,使得 $\pi_1\equiv\pi_2$

$$\Leftrightarrow\frac{A_1\lambda_1+A_2\mu_1}{A_3\lambda_2+A_4\mu_2}=\frac{B_1\lambda_1+B_2\mu_1}{B_3\lambda_2+B_4\mu_2}=\frac{C_1\lambda_1+C_2\mu_1}{C_3\lambda_2+C_4\mu_2}=\frac{D_1\lambda_1+D_2\mu_1}{D_3\lambda_2+D_4\mu_2}\overset{\Delta}{=}m(m\neq0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A_1\lambda_1+A_2\mu_2-mA_3\lambda_2-mA_4\mu_2=0,\\ B_1\lambda_1+B_2\mu_2-mB_3\lambda_2-mB_4\mu_2=0,\\ C_1\lambda_1+C_2\mu_2-mC_3\lambda_2-mC_4\mu_2=0,\\ D_1\lambda_1+D_2\mu_2-mD_3\lambda_2-mD_4\mu_2=0\end{cases}$$

因为 $\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2$ 不全为零,所以得

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & -mA_3 & -mA_4\\ B_1 & B_2 & -mA_3 & -mA_4\\ C_1 & C_2 & -mC_3 & -mC_4\\ D_1 & D_2 & -mD_3 & -mD_4\end{vmatrix}=0.$$

收稿日期:2015-07-16
*基金项目:安徽省自然科学研究项目(KJ2013B153,KJ2013Z258);安徽省教学研究项目(2012jYxm595);数学教育省级特色专业(20101184);省级精品资源共享课程“解析几何”项目建设(2015gxk089);省级教学团队“高等数学团队”项目建设(2015jxtd048)。
作者简介:周明(1965-),男,硕士,副教授,研究方向:几何学。

而$m\neq 0$.所以

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$$

利用此方法比利用直线通过的已知点组成的向量和两直线方向向量的混合积等于零来判定两直线共面简便多了。

2.2 判定直线与平面的位置关系

定理3 若直线

$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0(A\neq 0)$,

则

$$1^0\quad l\subset\pi\Leftrightarrow \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & C \\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} A & D \\ A_1 & D_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & D \\ A_2 & D_2\end{vmatrix}};$$

$$2^0\quad l//\pi\Leftrightarrow \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & C \\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}\neq\frac{\begin{vmatrix} A & D \\ A_1 & D_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & D \\ A_2 & D_2\end{vmatrix}};$$

$$3^0\quad l\cap\pi\Leftrightarrow \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}\neq\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & C \\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}.$$

证明 过直线l 的平面π'的方程是

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

且 $\lambda^2+\mu^2\neq 0$.

即 $(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0.$

因为 $l\subset\pi\Leftrightarrow\pi'\equiv\pi$

$$\Leftrightarrow\frac{\lambda A_1+\mu A_2}{A}=\frac{\lambda B_1+\mu B_2}{B}=\frac{\lambda C_1+\mu C_2}{C}=\frac{\lambda D_1+\mu D_2}{D}\ m(m\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda A_1+\mu A_2=mA, \\ \lambda B_1+\mu B_2=mB, \\ \lambda C_1+\mu C_2=mC, \\ \lambda D_1+\mu D_2=mD\end{cases}$$

又 $\because A\neq 0$,

$$\therefore\begin{cases}\lambda(A_1B-AB_1)=\mu(AB_2-A_2B), \\ \lambda(A_1C-AC_1)=\mu(AC_2-A_2C), \\ \lambda(A_1D-AD_1)=\mu(AD_2-A_2D)\end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{A_1B-AB_1}{AB_2-A_2B}=\frac{A_1C-AC_1}{AC_2-A_2C}=\frac{A_1D-AD_1}{AD_2-A_2D}$$

即

$$l\subset\pi\Leftrightarrow \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & C \\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} A & D \\ A_1 & D_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & D \\ A_2 & D_2\end{vmatrix}};$$

同理可证2^0式和3^0式。

利用此方法判定直线在平面内比利用条件

$$\begin{cases}\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=0, \\ \begin{vmatrix} A & B & D \\ A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

来判定容易多了。

2.3 直纹曲面的性质证明

定理4 经过单叶双曲面的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线[3]182。

证明 因为单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 双的两族直母线分别为

$$l_1:\begin{cases}\omega\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\omega\left(1-\frac{y}{b}\right);\end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\nu\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right).\end{cases}$$

而通过l_1 的平面π：

$$\lambda\left[\omega\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-\mu\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]+\nu\left[\mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-\omega\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]=0,$$

整理得

$$\omega\left[\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-\nu\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]+\mu\left[\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)-\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]=0.$$

所以π 通过 l_2。

同理可证通过 l_2 的平面必通过 l_1 。

定理5 双曲抛物面$\Sigma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 上与平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 平行的直母线方程是

$$\begin{cases} bCx+aCy+ab(aA-bB)=0, \\ b(aA-bB)x-a(aA-bB)y+2abCz=0;\end{cases}$$

或

$$\begin{cases} bCx-aCy+ab(aA+bB)=0, \\ b(aA+bB)x+a(aA-bB)Y+2abCz=0.\end{cases}$$

证明 设双曲抛物面$\Sigma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$的一族直母线为

$$l:\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\nu, \\ \nu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=z;\end{cases}$$

所以通过 l 的平面π'。

$$\lambda\left[\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)-2V\right]+\mu\left[V\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)-z\right]=0,$$

$$\therefore\quad(\lambda+\mu V)bx+(\lambda-\mu V)ay-\mu abz-2abV=0.$$

$$\because\quad\pi'//\pi$$

$$\therefore\quad\frac{(\lambda+\mu V)b}{A}=\frac{(\lambda-\mu V)a}{B}=\frac{-\mu ab}{C}=t,$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \lambda b+\mu bV=tA, \\ \lambda a-\mu aV=tB, \\ -\mu ab=tC. \end{cases}$$

消去t,λ,μ可得

$$V=\frac{bB-aA}{2C}.$$

将$V=\dfrac{bB-aA}{2C}$代入l方程得

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{bB-aA}{C}, \\ \dfrac{bB-aA}{2C}\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z; \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} bCx+aCy+ab(aA-bB)=0, \\ b(aA-bB)x-a(aA-bB)y+2abCz=0; \end{cases}$$

同理可证与平面π平行的另一直母线

$$\begin{cases} bCx-aCy+ab(aA+bB)=0, \\ b(aA+bB)x+a(aA+bB)y+2abCz=0. \end{cases}$$

例1 在双曲抛物面$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=z$上，求平行平面$\pi:3x+2y-4z=0$的直母线[4]。

解将$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=z$，整理为$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{2}=2z.$

因为$a=2\sqrt{2},b=\sqrt{2},A=3,B=2,C=-4.$

所以与平面$\pi:3x+2y-4z=0$平行的直母线为

$$l_1:\begin{cases} \sqrt{2}\times(-4)x+2\sqrt{2}\times(-4)y+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}\times3-\sqrt{2}\times2)=0, \\ \sqrt{2}\times(2\sqrt{2}\times3-\sqrt{2}\times2)x-2\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}\times3-\sqrt{2}\times2)y+2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times(-4)z=0; \end{cases}$$

或

$$l_2:\begin{cases} \sqrt{2}\times(4)x-2\sqrt{2}\times(-4)y+2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}\times3+\sqrt{2}\times2)=0, \\ \sqrt{2}\times(2\sqrt{2}\times3+\sqrt{2}\times2)x+2\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}\times3+\sqrt{2}\times2)y+2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times(-4)z=0; \end{cases}$$

整理得

$$l_1:\begin{cases} x+2y-4=0, \\ x-2y-4z=0; \end{cases}$$

或

$$l_2:\begin{cases} x-2y-8=0, \\ x+2y-2z=0. \end{cases}$$

2.4 通过已知直线且满足另一约束条件的平面方程

例2 求经过直线$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$且过点$P(x_0,y_0,z_0)$的平面方程。

解 因为经过直线l的平面π：

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

而

$$P(x_0,y_0,z_0)\in\pi,$$

所以

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

$$\therefore \lambda:\mu=-(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2):(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1).$$

所以经过l且过点$P(x_0,y_0,z_0)$的平面方程为

$$(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)-(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

例3 经过直线$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$且与平面$\pi:Ax+By+Cz+D=0$垂直的平面方程。

解 因为经过l的平面

$$\pi':\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

即

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0.$$

所以平面π'的法向量$\vec{n'}=\{\lambda A_1+\mu A_2,\lambda B_1+\mu B_2,\lambda C_1+\mu C_2\}$,

而平面π的法向量$\vec{n}=\{A,B,C\}$,

又因为$l\perp\pi$,

所以$\pi'\perp\pi$,

即$\vec{n'}\perp\vec{n}$,

$$\therefore \vec{n'}\bullet\vec{n}=A(\lambda A_1+\mu A_2)+B(\lambda B_1+\mu B_2)+C(\lambda C_1+\mu C_2)=0$$

$$\therefore \lambda(AA_1+BB_1+CC_1)+\mu(AA_2+BB_2+CC_2)=0$$

$$\therefore \lambda:\mu=-(AA_2+BB_2+CC_2):(AA_1+BB_1+CC_1)$$

所以所求平面π'：

$$(AA_2+BB_2+CC_2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)-(AA_1+BB_1+CC_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

例4 求经过直线$l_1:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$且垂直于直线$l_2:\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$的平面方程。

解 因为经过直线l_1的平面π：

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

即

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0.$$

所以平面π的法向量$\vec{n}=\{\lambda A_1+\mu A_2,\lambda B_1+\mu B_2,\lambda C_1+\mu C_2\}$,

而直线$l_2:\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$的方向向量$\vec{v}=\{X,Y,Z\}$,

又因为$l_1\perp l_2$,

所以$\pi\perp l_2$,

即

$$\vec{v}//\vec{n},$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda A_1+\mu A_2}{X}=\frac{\lambda B_1+\mu B_2}{Y}=\frac{\lambda C_1+\mu C_2}{Z}=t$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \lambda A_1+\mu A_2=tX, \\ \lambda B_1+\mu B_2=tY, \\ \lambda C_1+\mu C_2=tZ. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \lambda:\mu &=(C_2X-A_2Z):(A_1Z-C_1X) \\ &=(C_2Y-B_2Z):(B_1Z-C_1Y) \\ &=(B_2X-A_2Y):(A_1Y-B_1X). \end{aligned}$$

所以所求平面π方程为

$$(C_2X-A_2Z)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(A_1Z-C_1X)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

或

$$(C_2Y-B_2Z)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(B_1Z-C_1Y)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

或

$(B_2X - A_2Z)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_1Y + B_1X)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$

平面束定理在解析几何中起着重要作用。其定理对判定直线与平面的位置关系,两直线共面以及求通过直线平面方程等问题方面起着很大的作用,同时可以用来证明直纹曲面的性质,有利于我们更好地理解和掌握其性质。

注释及参考文献:

[1]李海英.有轴平面束方程及应用[J].湖南工业职业技术学院学报,2014,14(3):16-18.

[2]徐传友.周俊东,储亚伟.平面束定理证明与应用的教学探讨[J].阜阳师范学院学校(自然科学版),2014,31(1):75-78.

[3]吕林跟.徐子道.解析几何[M].北京:高等教育出版社,2010.

[4]纪文强.空间解析几何[M].北京:高等教育出版社,2013:225-226.

The Application of Axial Plane Beam

ZHOU Ming[1],XU Jing-hai[2]

(1.Department of Education, Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800;

2.Department of Mechanical Engineering, Fuyang Technician Institute, Fuyang, Anhui 236000)

Abstract: The plane beam theorem is an important content in plane analytic geometry on a straight line of space and plane part,by using the plane beam theorem ,it plays an important role that we can determine the location of the straight line and plane relationship, two straight line coplanar theorem, the method to get the nature of the ruled surface and plane equation.

Key words: plane beam; equation; ruled surface

DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.04.004

(上接第4页)

the optimal medium was PDA for the growth of the fungus. Temperature, pH, nitrogen sources and carbon sources affected the growth of the fungus. The fungus could grow at 15~35 ℃.The optimal growth temperature was 25~35 ℃. It was adaptable to the properties in a broader pH value range. It could grow well between pH 5.0 and pH 9.0. Many carbon sources and nitrogen sources tested could obviously make the fungus grow. The best carbon source was glucose, soluble starch, mannose or sugar. The best nitrogen source was sodium nitrate. It could grow on the Czapek Agar with a concentration of 1 000 mg/L $Pb(NO_2)_2$ or 100 mg/L $CdCl_2.2.5H_2O$.The results showed that the fungus had stronger adaptability under lead stress and cadmium stress.

Key words: Davidia involucrate; endophytic fungus; Alternaria sp.; biological characteristics;lead stress; cadmium stress

DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.04.001