

对柳比莫夫摆运动规律的探讨*

张邦健, 苗峰**, 张传武

(西南民族大学 电信学院, 四川 成都 610000)

【摘要】推出了柳比莫夫摆的动力学特征方程,通过对动力学方程的分析证明了柳比莫夫摆并非摆动而是做圆周运动,得出了小球运动的特征椭圆,并利用特征椭圆分析小球运动的规律并给出了周期公式。

【关键词】柳比莫夫摆;特征方程;特征椭圆;周期

【中图分类号】O314 **【文献标志码】**A **【文章编号】**1673-1891(2015)03-0017-03

DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.03.006

1 问题的提出

柳比莫夫摆是研究热对流问题的一个简化模型^[1-3]。图1所示为柳比莫夫摆模型图,框架上悬挂小球,小球质量为 m , 框架质量为 M 。将小球移开平衡位置并给其一切向速度 \vec{v}_0 , 同时释放框架。当 $m \ll M$ 时, 小球会绕框做匀速圆周运动^[4]。如果 m 与 M 可比拟时, 小球又将做怎样的运动呢? 文献^[5]已对这个问题有了一定的探讨, 本文将进一步分析小球的运动规律。

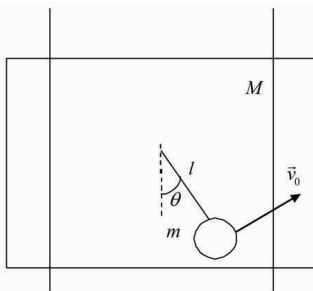


图1 柳比莫夫摆装置图

2 小球运动规律的特征方程

关于 θ 的大小, 作如下规定: 从 y 轴负半轴开始逆时针旋转一定的角度与摆线重合, 这个角度就称为 θ 。笔者采用隔离法来建立方程, 首先以框为研究对象, 该物体受到三个力的作用, 即重力 $M\vec{g}$, 绳对框的拉力 \vec{F} , 杆对框的作用力 \vec{N} , 如图2所示

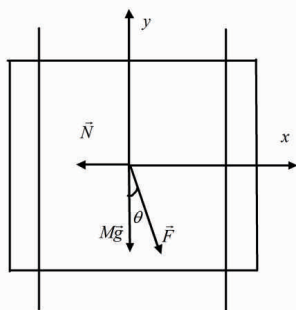


图2 框的受力示意图

根据牛顿第二定律可知 $\vec{N} + M\vec{g} + \vec{F} = M\vec{a}_M$ (1)
式中 $\vec{a}_M = \vec{a}_{Mx} + \vec{a}_{My}$ (2)
其中 \vec{a}_M 表示框架的加速度, \vec{a}_{Mx} 、 \vec{a}_{My} 分别为 \vec{a}_M 在 x 、 y 轴上的分量。

由于 M 固定在两杆之间, 只有在 y 轴方向上才有加速度, 因此有 $\vec{a}_M = \vec{a}_{My}$ (3)

$$y \text{ 轴方向上有 } -F \cos \theta - Mg = -Ma_M \quad (4)$$

再以小球作为研究对象, 该物体受到三个力, 即重力 $m\vec{g}$, 绳给小球的拉力 $-\vec{F}$, 惯性力 $-m\vec{a}_M$ 的作用, 如图3所示。

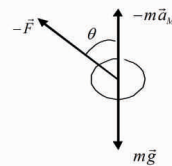


图3 小球的受力示意图

$$\text{根据牛顿第二定律, 有 } m\vec{g} - \vec{F} - m\vec{a}_M = m\vec{a} \quad (5)$$

$$\text{式中 } \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \quad (6)$$

其中 \vec{a} 为小球相对于框的加速度, \vec{a}_x 、 \vec{a}_y 分别为 \vec{a} 在 x 、 y 方向上的分量。其对应的 x 、 y 轴方向上的标量方程为

$$F \cos \theta + ma_M - mg = ma_y \quad (7)$$

$$-F \sin \theta = ma_x \quad (8)$$

利用 x 、 y 方向的分速度与夹角的关系可知

$$\frac{v_y}{v_x} = \tan \theta \quad (9)$$

$$\text{由(4)(7)得 } ma_M - (M + m)g = -Ma_M + ma_y \quad (10)$$

$$\text{将(10)与(4)(8)联立, 可得 } \tan \theta = -\frac{(M + m)a_x}{Ma_y} \quad (11)$$

$$\text{根据(9)(11)可得 } (M + m)v_x a_x + Mv_y a_y = 0 \quad (12)$$

$$\text{即 } (M + m)v_x dv_x + Mv_y dv_y = 0 \quad (13)$$

$$\text{两边同时积分得 } (M + m)v_x^2 + Mv_y^2 = C \quad (14)$$

将初始条件 $v_x = v_{x_0}$ 、 $v_y = v_{y_0}$ 代入(14)得

$$C = (M + m)v_{x_0}^2 + Mv_{y_0}^2 \quad (15)$$

收稿日期:2015-03-27

*基金项目:西南民族大学2014年教育教学改革青年项目(项目编号:2014QN05)。

作者简介:张邦健(1990-),男,四川成都人,硕士,研究方向:材料物理。**为通信作者苗峰博士。

3 证明小球做圆周运动

3.1 细绳始终是绷直的

假设在某时刻,细绳正好要弯曲,如图4所示,图中 ΔS 为一无穷小量。此时 $F=0$,则有 $a_M=g$,小球的惯性力与重力恰好抵消,因此小球相对于框的加速度为零。小球将按原方向即圆弧的切线方向运动,细绳又将重新被拉紧。所以,细绳始终是绷直的。

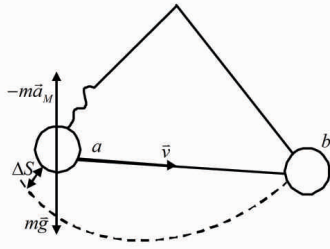


图4 绳弯曲时球的运动情况

3.2 小球的运动永不反向

从(14)可以看出:小球相对于框的速度永不为零也不趋近于零,否则 $v_x=v_y=0$,与(14)矛盾。由于小球的速度不能突变,所以小球的运动将不会反向。

3.3 小球的位移没有极限

现假设A点是球的极限位置,可以分两种情况:①小球相对于框静止在A点;②小球相对于框无限逼近A点。对于①,显然有球相对于框的速度为零。对于②,前面已经论述了球的运动永不反向,而球又无限逼近A点,故必然有球相对于框的极限速度也为零,同样与(14)矛盾。可见球的位移没有极限。

综上所述,由于绳在任意时刻都是绷直的,且球的运动永不反向,球的位移又没有极限,则相对于框,球必然做圆周运动。

4 小球运动的特征椭圆

4.1 v-θ 关系

(14)反映出了 v_x 与 v_y 满足椭圆关系,令

$$\alpha = \sqrt{\frac{C}{M}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{C}{M+m}}$$

$$(14) \text{ 简化为 } \frac{v_x^2}{\beta^2} + \frac{v_y^2}{\alpha^2} = 1 \quad (16)$$

其图像如图5所示

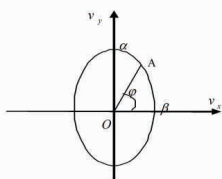


图5 特征椭圆1(v_y-v 关系)

下面再进一步地讨论这个椭圆与小球运动规律之间更深层次的联系。从图5中可以得出

$$\tan \varphi = \frac{v_y}{v_x} \quad (17)$$

再与(9)对比,可以得出一个结论: $\varphi = \theta$ 。具体地说,小球的角位移为 θ 时的速度对应于图5中 φ 为 θ 时的点A,小球的水平、竖直分速度分别为点A的横、纵坐标,合速度 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 即为线段OA的长度。这样,就描述出了小球在任意一点时的速度大小。

$\therefore \frac{v_x^2}{\beta^2} + \frac{v_y^2}{\alpha^2} = 1$, 将 $v_x = v \cos \theta, v_y = v \sin \theta$ 代入,整理得

$$v = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \theta + \beta^2 \sin^2 \theta}} \quad (18)$$

此式就是 $v-\theta$ 关系式。

4.2 θ-t 关系

若将图5中的椭圆做这样的变换:保持各点的纵坐标不变,横坐标变为原来的 $\frac{\alpha}{\beta}$ 倍,则将原来的椭圆拉成了一个半径为 α 的圆,如图6(a)所示。

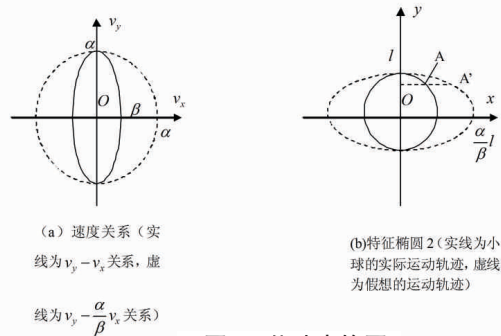


图6 位速变换图

这反映出了 v_y 与 $\frac{\alpha}{\beta} v_x$ 满足圆的关系,两者的平方和即合速度的平方为一定值。换句话说,假若存在另一质点P的运动,只要在任一时刻该运动与原来小球的运动满足竖直速度相等,水平速度为小球的 $\frac{\alpha}{\beta}$ 倍。那么,该运动为匀速率运动。要如何实现这一变换呢?只需将小球原来轨迹的圆也横向拉伸 $\frac{\alpha}{\beta}$ 倍变成一个椭圆,这个椭圆就是所要找的新运动轨迹。即假想一个匀速运动,它的轨迹为如图6(b)所示的椭圆,速度大小等于 $v_x=0$ 时的竖直速度。记这个等效速度为 \hat{v} ,由(14)式可求得 $\hat{v} = \sqrt{\frac{C}{M}}$ 。那么,在竖直方向上P与小球的运动完全同步。如图6(b)所示,经过时间,P匀速运动到A',此时小球在位置A。这样,就描述出了小球在任意时刻的位置。

椭圆1描述出了小球运动的 $v-\theta$ 关系,椭圆2描述出了小球运动的 $\theta-t$ 关系,结合起来就完全地描述出了小球的运动规律,不妨称此二椭圆为小球运动规律的特征椭圆。

5 柳比莫夫摆的性质

根据特征椭圆,可以发现一些柳比莫夫摆的性质:

5.1 小球速度的变化规律

根据特征椭圆1,有小球与悬点相平时速度最大,在最高和最低位置时速度最小。从水平位置经过最低(高)点到水平位置时,水平分速度从零到最大再变为零,而竖直分速度从最大变为零再变到最大。

5.2 小球运动的周期

根据特征椭圆2,有小球运动的周期 $T = \frac{L}{\hat{v}}$ (L 为特征椭圆2的周长, $\hat{v} = \sqrt{\frac{C}{M}}$, C 由(15)式确定。

$$\text{椭圆的周长 } L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} d\phi = 4aE(e) \quad (19)$$

式中 a 是椭圆的长半轴, e 是椭圆的离心率。 $E(e) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right]^2 \frac{e^{2n}}{1-2n}$,为第二类完全椭圆积分^[6]。

5.3 小球的运动学方程

由于当 $\theta = 0$ 时小球在最低点,故将椭圆的方程用参数方程 $x = a \sin \theta, y = -b \cos \theta$ 来表示(这里的 θ 就是小球的角位移), $\theta - t$ 的定量关系可由式子

$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = \hat{v} t$ 确定。其中 s 是P的路程,定积分

$\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta = a \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta - a \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} d\theta = aE(\theta|e^2) - aE(\theta_0|e^2)$ 其中 $E(\theta_0|e^2)$ 和 $E(\theta|e^2)$ 均为第二类不完全椭圆积分^[6],求不出精确值,可用数值算法或数学软件求得其近

似值,这里不再详细叙述。通过这个式子可以求出小球在任意时刻 $\theta - t$ 的关系,即小球的运动学方程。

5.4 $m \ll M$ 时小球的周期及周期公式的检验

当 $m \ll M$ 时,小球的周期是多少呢?此时 $F = 0$,因此 $a_M = g$,说明小球相对于框做匀速圆周运动。

$$\therefore T_0 = \frac{2\pi l}{v_0} \quad (20)$$

下面由以上所求周期公式计算该情形下的周期:

此时 $c = Mv_0^2, \alpha = \beta$

因此 $e = 0, E(0) = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore L = 4l \times \frac{\pi}{2} = 2\pi l$$

$$T = \frac{L}{\sqrt{\frac{C}{M}}} = \frac{2\pi l}{v_0} \quad (21)$$

$$T = T_0 \quad (22)$$

即小球质量远远小于框的质量时的周期公式可作为柳比莫夫摆周期公式的特例给出,同时也说明了柳比莫夫摆周期公式的正确性。

6 结论

本文利用经典力学理论推出了柳比莫夫摆的动力学特征方程及特征椭圆,并通过特征椭圆进行分析得出了 $v - \theta$ 及 $\theta - t$ 之间的关系。证明了柳比莫夫摆做非匀速圆周运动,并得到了柳比莫夫摆运动的周期公式。本文结果研究表明, $m \ll M$ 时的柳比莫夫摆周期公式可作为柳比莫夫摆运动周期公式的特例给出。

注释及参考文献:

- [1] Pavan K. Shukla, R. Narayanan. The effect of time-dependent gravity with multiple frequencies on the thermal convective stability of a fluid layer[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2002(45):4011-4020.
- [2] D. Lyubimov, A. Cherepanov, T. Lyubimova. Behavior of a drop (bubble) in a non-uniform pulsating flow[J]. Advances in Space Research, 2002,4(29):667-672.
- [3] Mark I. Shliomis. Nonlinear Dynamics of a Ferrofluid pendulum[J]. Physical Review Letters, 2004,7(23).
- [4] 漆安慎,杜焯英.普通物理教程-力学[M].北京:高等教育出版社,2005:112,477.
- [5] 张邦健,黎昌金,陈永强,等.对柳比莫夫摆运动规律的研究[J].西部教育研究,2010,4:108-110.
- [6]《现代数学手册》编纂委员会.现代数学手册-经典数学卷[M].武汉:华中科技大学出版社,1999:372-377.

The Discussion of the Lyubimov Pendulum's Law of Movement

ZHANG Bang-jian, MIAO Feng, ZHANG Chuan-wu

(School of Electronic and Information Engineering, Southwest University for Nationalities, Chengdu, Sichuan 610000)

Abstract: In this paper, we have derived the kinetic characteristic equation of the Lyubimov Pendulum's and have proved that it will circle. It is concluded eigenellipse of the small ball movement. Making use of the eigenellipse, it has also solved the Period's analytical expressions of the Pendulum's movement and provided its cycle formula.

Key words: Lyubimov Pendulum's; characteristic equation; eigenellipse; period