一种基于泛函极值的等周约束问题的求解方法

吴群妹
(无锡科技职业学院,江苏 无锡 214000)

【摘 要】等周约束问题实质上是一个带积分方程约束的泛函极值问题。利用泛函极值的基本定理求解出等周约束问题,方便快捷。

【关键词】泛函变分; 泛函极值; 等周问题
【中图分类号】O177.92;O176.2 【文献标志码】A 【文章编号】1673-1891(2015)03-0015-02
DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.03.005

引言

等周问题最早是由著名数学家Joham Beynoulli在1697年提出的,即在具有定长的一切平面单纯闭曲线中,圆是最大面积的曲线[1]。此后,很多学者都对这个问题展开了讨论与研究[2-3],有《平面等周问题的两个推广形式》[4]、《含约束条件的等周问题的研究》等等。变分法是17世纪末开始发展起来的一个数学分支,是为了研究泛函的极值问题而产生的。而"等周约束问题"实质就是一个带积分方程约束的泛函极值问题。本文根据变分法的基本定理,将带积分方程约束的极值问题转化为带微分方程的泛函极值问题对"等周约束问题"的建立了模型,并且求出其解。

1 等周问题

等周问题的描述如下:在平面上长度一定的所有封闭光滑曲线中找一条曲线,使其所围成的面积最大。下面先对"等周问题"建立数学模型。

设所求的参数方程为$\Gamma:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $(t_0\le t\le t_1)$,由于曲线是封闭的,则$x(t_0)=x(t_1)$,$y(t_0)=y(t_1)$。曲线的周长是固定的,即$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=L$。由多元微积分中的Green公式,封闭曲线所围成的面积为

$$S[x(t),y(t)]=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(xy'-yx')dt\quad。$$

于是等周问题归结为在封闭光滑曲线的集合

$$D=\left\{(x(t),y(t)\middle|x(t),y(t)\in C[t_0,t_1],x(t_0)=x(t_1),y(t_0)=y(t_1)\right\}$$

中找一条曲线,使$S[x(t),y(t)]$在约束条件$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=L$下取最大值。该问题即为一个在积分方程约束条件下的泛函极值问题。

2 变分法基本原理

带积分方程约束的泛函极值问题具有以下定理:

定理1[5] 设$x(t)\in R^n$、$y(t)\in R^n$是具有一阶连续导数的n维向量函数,$F(t,x(t),y(t))$是标量函数,且相对于其所有的自变量都具有连续的一阶和二阶偏导数,$e(t,x(t),y(t))\in R^m$是所有的自变量都具有连续一阶和二阶偏导数的m维向量函数。求使泛函$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x(t),y(t))dt$取得极值且满足等周约束条件$\int_{t_0}^{t_1}e(t,x(t),y(t))dt=C$和固定边界条件$x(t_0)=x_0$、$y(t_0)=y_0$的极值轨线$x^*(t)$,其中$C\in R^m$是$m$维常向量。解决这个问题的思路是引进新的变量,将积分方程约束变量转化成微分方程的约束条件。

令$z(t)=\int_{t_0}^{t_1}e(t,x(t),y(t))dt$,则新变量$z(t)$满足条件$z(t_0)=0$,$z(t_1)=c$,并且$z'(t)=e(t,x(t),y(t))$。这样带积分方程约束的泛函极值问题转化为带微分方程约束的泛函极值问题。构造Lagrange函数如下:

$$L=(t,x(t),y(t),\lambda(t),z'(t))=F(t,x(t),y(t))+\lambda^T(t)[e(t,x(t),y(t))-z'(t)]$$

其中$\lambda(t)=[\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_m(t)]^T$是待定的Lagrange乘子。类似于定理2的分析,得泛函$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x(t),y(t))dt$取极值的极值轨线$x^*(t)$应满足的必要条件为

$$\frac{\partial L(t,x^*(t),y^*(t),\lambda^*(t),z^*(t))}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t,x^*(t),y^*(t),\lambda^*(t),z^*(t))}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial L(t,x^*(t),y^*(t),\lambda^*(t),z^*(t))}{\partial \lambda}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t,x^*(t),y^*(t),\lambda^*(t),z^*(t))}{\partial \lambda}=0,$$

$$\frac{\partial L(t,x^*(t),y^*(t),\lambda^*(t),z^*(t))}{\partial z}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t,x^*(t),y^*(t),\lambda^*(t),z^*(t))}{\partial z}=0。$$

因为Lagrange函数$L=(t,x(t),y(t),\lambda(t),z(t))$不含有$\lambda(t)$、$z(t)$,所以上述必要条件简化后得到如下结论。

定理2[5] 设$x(t)\in R^n$、$y(t)\in R^n$是具有一阶连续导数的n维向量函数,$F(t,x(t),y(t))$是标量函数,且相对于其所有的自变量都具有连续的一阶和二阶偏导数,$e(t,x(t),y(t))\in R^m$是所有的自变量都具有连续一阶和二阶偏导数的 维向量函数。使泛函$J[x]=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x(t),y(t))dt$取得极值且满足等固约束条件$\int_{t_0}^{t_1}e(t,x(t),y(t))dt=C$和固定边界条件$x(t_0)=x(t_1)$、

收稿日期:2015-05-11
作者简介:吴群妹(1981-),女,江苏苏州人,硕士研究生,讲师,主要从事高等数学、应用数学、最优控制研究。

$y(t_0)=y(t_1)$的最优轨线$x^*(t)$应满足的必要条件为

$$\frac{\partial L(t,x^*(t),y^*(t),\lambda^*(t),z^*(t))}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t,x^*(t),y^*(t),\lambda^*(t),z^*(t))}{\partial y}=0,$$

$z^*(t)=e(t,x^*(t),y^*(t))$，$\lambda^*(t)=0$ 或λ^*为常向量。

3 基于泛函极值的等周约束问题的求解

等周问题归结为求泛函$S[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}(xy'-yx')dt$在约束条件$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=L$和边界条件下$x(t_0)=x(t_1)$，$y(t_0)=y(t_1)$的极大值。

记$v(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1(t)\\v_2(t)\end{pmatrix}$,则

$$S[x(t),y(t)]=S[v(t)]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(v_1(t)v_2'(t)-v_2(t)v_1'(t))dt$$

$$F[t,v(t),v'(t)]=xy'-yx'=v_1(t)v_2'(t)-v_2(t)v_1'(t),$$

$$e(t,v(t),v'(t))=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=\sqrt{(v_1'(t))^2+(v_2'(t))^2}$$

记$z(t)=\int_{t_0}^{t_1}e(t,v(t),v'(t))dt$,则构造Lagrange函数如下:

$$L=(t,v(t),v'(t),\lambda(t),z'(t))=F(t,v(t),v'(t))+\lambda^T(t)[e(t,v(t),v'(t))-z'(t)]$$

其中$\lambda(t)=(\lambda_1(t),\lambda_2(t))^T$是待定的Lagrange乘子。由定理3知最优轨线$v(t)$应满足如下条件

$$\frac{\partial L(t,v(t),v'(t),\lambda(t),z'(t))}{\partial v}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t,v(t),v'(t),\lambda(t),z'(t))}{\partial v'}=0,$$

并且$\lambda(t)=\lambda$是常数,

$y'-\frac{d}{dt}[-y+\frac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}]=0$，$-x'-\frac{d}{dt}[x+\frac{\lambda y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}]=0$。

积分得$2y-\frac{\lambda x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}=2c_1$，$2x+\frac{\lambda y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}=2c_1$。从而

$(x-c_1)^2+(y-c_1)^2=\frac{\lambda^2}{4}$，令$\begin{cases}x-c_1=\frac{\lambda}{2}\cos t\\ y-c_1=\frac{\lambda}{2}\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$。

代入等周条件,

得$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda^2}{4}\sin^2 t+\frac{\lambda^2}{4}\cos^2 t}\,dt=\lambda\pi$，即$\lambda=\frac{L}{\pi}$。于是$(x-c_1)^2+(y-c_1)^2=\frac{L^2}{4\pi^2}$。边界条件下$x(t_0)=x(t_1)$，$y(t_0)=y(t_1)$可确定$C_1,C_2$,故所求极值曲线是一个圆。

4 小结

本文利用变分法中带积分约束泛函的极值问题很好的求解了积分约束的等周问题。此外,等周问题还有《分数阶导数的等周问题》[6],《两平行线间的等周问题》[7]等,今后将会对其他形式的等周问题作进一步探讨。

注释及参考文献:

[1]项武义.等周问题的一个初等证明[J]. 数学年刊, 2002(23A):7-12.
[2]孙冬梅.变分法在求解最速渡江路线问题的应用[J]. 高等数学研究, 2005, 8(6), 55-59.
[3]姬小龙.关于等周问题级数解法的一些改进[J]. 大学数学, 2005, 21(2):82-83.
[4]刘鹏.平面等周问题的两个推广形式[J]. 高等函授学报(自然科学版), 2009, 22(4):76-77.
[5]张莲,胡晓倩,王彬,等.现代控制理论[M]. 北京:清华大学出版社, 2008:314-323.
[6]高正晖,杨柳,刘刚.一类含分数阶导数的等周变分问题[J]. 衡阳师范学院学报, 2014, 35(6):1-4.
[7]刘海亭,李寿贵, 柴方.限制在两平行线间的等周问题[J]. 数学杂志, 2012, 32(2):377-380.

A Solution Method Based on Functional Extremum of Isoperimetric Problem

WU Qun-mei
(Wuxi Technology and Professional College, Wuxi, Jiangsu 214000)

Abstract: The isoperimetric constraint problem is essentially a functional extrema of integral equations with constraints. It is convenient to use the basic theorems of functional extremum solving the isoperimetric constraint problem.

Key words: functional variation; functional extreme; isoperimetric problem