第29卷第3期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.29,NO.3
2015年9月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Sep.,2015

一类特殊三角函数的最大值解

周桂如
(福建船政交通职业学院 基础教研室,福建 福州 350007)

【摘 要】首先在△ABC中,给出特定系数$3\sin A+4\sin B+18\sin C$的最大值问题,分别利用逐步分析法、拉格朗日乘数法和不等式三种方法获得相同的结果,然后利用拉格朗日乘数法推导出任意系数三角函数$a\sin A+b\sin B+c\sin C$(其中a、b、$c\in R^{+}$)的最大值求解方法,最后推导三角函数$a\cos A+b\cos B+c\cos C$(其中a、b、$c\in R^{+}$)的极值。

【关键词】拉格朗日乘数法;逐步分析法;极值
【中图分类号】O174 【文献标志码】A 【文章编号】1673-1891(2015)03-0012-03
DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.03.004

引言

最值和不等式,是数学组成的重要内容和部分,不等式揭示变量之间的制约关系,而最值问题与它紧密相关。三角函数的最值问题是函数最值问题的一个重要部分。解答三角函数的最值问题,除了要用到代数中求最值问题的定理和方法外,通常还要借助三角函数的一些特性来求解。

引理1[1]:$y=a\cos x+b\sin x$(a、$b\neq 0$),当$x+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$($k\in Z$)其中$\tan\varphi=\frac{a}{b}$时$y$取得最大值$\sqrt{a^2+b^2}$。

引理2[2]:在任意△ABC中有

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$。

引理3[3]:对$\forall x$、y、$z\in R$及u、v、$w>0$及任意△ABC有$yz\sin A+xz\sin B+xy\sin C\leqslant(\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{v^2}+\frac{z^2}{w^2})\frac{\sqrt{vw+wu+uv}}{2}$当且仅当$x:y:z=\cos A:\cos B:\cos C$且$u:v:w=\cot A:\cot B:\cot C$时等号成立。

引理4[4]:设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内具有二阶连续偏导数,且点$P_0(x_0,y_0)$是函数的驻点,即$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$,记:$A=f_{xx}''(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}''(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}''(x_0,y_0)$,$\Delta=B^2-AC$. 则:

(1)当$\Delta<0$时,函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处有极值,且当$A<0$时,$A>0$有极大值,当时,有极小值;

(2)当$\Delta>0$时,函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处没有极值;

(3)当$\Delta=0$时,函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可能有极值,也可能没有极值。

1 主要结果

1.1 逐步分析法[5]

三角形三个角A、B、C的取值范围为

$(A,B,C)\in D\equiv\{(\alpha,\beta,\gamma)\mid\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha>0,\beta>0,\gamma>0\}$

首先考虑$3\sin A+4\sin B+18\sin C$在D的闭包

$E=\{(\alpha,\beta,\gamma)\mid\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha\geq 0,\beta\geq 0,\gamma\geq 0\}$上的最大值。

有$\max\limits_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)$

$=\max\limits_{\substack{A+C\leq\pi\\A,C\geq 0}}[3\sin A+4\sin(A+C)+18\sin C]$

$=\max\limits_{\substack{A+C\leq\pi\\A,C\geq 0}}(3\sin A+4\sin A\cos C+4\cos A\sin C+18\sin C)$

$=\max\limits_{\substack{A+C\leq\pi\\A,C\geq 0}}[(3+4\cos C)\sin A+4\sin C\cos A+18\sin C]$

$=\max\limits_{0\leq c\leq\pi}\left(\sqrt{(3+4\cos C)^2+16\sin^2 C}+18\sin C\right)$(由引理1得)

$=\max\limits_{0\leq c\leq\pi}\left(\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C\right)$

考虑 $f(C)=\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C$ $0\leq C\leq\pi$

易见 $f(C)\geq f(\pi-C)$ $\forall C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$f'(C)=18\cos C-\frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}}$

令$f'(C)=0$即$(8\cos C-1)(27\cos^2 C+32\cos C+4)=0$

则它在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的解为$C=\arccos\frac{1}{8}$

于是$\max\limits_{0\leq C\leq\pi}f(C)=\max\limits_{0\leq C\leq\frac{\pi}{2}}f(C)=\max\left\{f(\arccos\frac{1}{8}),f(0),f(\frac{\pi}{2})\right\}=\frac{35\sqrt{7}}{4}$

由此可得$\max\limits_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\frac{35\sqrt{7}}{4}$

另一方面,不难看到$3\sin A+4\sin B+18\sin C$在E的边界上(A、B、C之一为0)的最大值为22

所以,所求最大值为$\frac{35\sqrt{7}}{4}$

1.2 用拉格朗日乘数法

在$A+B+C=\pi$条件下求函数$3\sin A+4\sin B+18\sin C$的极大值。

令$L=3\sin A+4\sin B+18\sin C-\lambda(A+B+C-\pi)$

令$\begin{cases}L_A=3\cos A-\lambda=0\\L_B=4\cos B-\lambda=0\\L_C=18\cos C-\lambda=0\\L_\lambda=-(A+B+C-\pi)=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\cos A=\frac{\lambda}{3}\\\cos B=\frac{\lambda}{4}\\\cos C=\frac{\lambda}{18}\\A+B+C=\pi\end{cases}$

由引理2得$(\frac{\lambda}{3})^2+(\frac{\lambda}{4})^2+(\frac{\lambda}{18})^2+2\frac{\lambda^3}{3\times 4\times 18}=1$

解得 $\lambda=\frac{9}{4}$

收稿日期:2015-05-03

作者简介:周桂如(1980-),女,硕士,讲师,主要从事应用数学方面的研究。

由于所求实际问题存在极大值，故当$\lambda=\frac{9}{4}$时原函数取最大值

当$\lambda=\frac{9}{4}$时$\cos A=\frac{3}{4}$，$\cos B=\frac{9}{16}$，$\cos C=\frac{1}{8}$

则$\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\sin B=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，$\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

所以$\max(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\frac{35\sqrt{7}}{4}$

1.3 不等式法

由引理3令$\begin{cases}yz=3\\xz=4\\xy=18\end{cases}$　解得$\begin{cases}x=2\sqrt{6}\\y=\frac{3\sqrt{6}}{2}\\z=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}$

则$\cos A:\cos B:\cos C=12:9:2$

又由引理2得$\cos A=\frac{3}{4}$，$\cos B=\frac{9}{16}$，$\cos C=\frac{1}{8}$

所以$\cot A:\cot B:\cot C=45:27:5$

故取$u=45$，$v=27$，$w=5$带入引理3中不等式得$3\sin A+4\sin B+18\sin C\leq\frac{35\sqrt{7}}{4}$

所以$\max(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\frac{35\sqrt{7}}{4}$

2 一般形式的三角函数极值

2.1 对于△ABC，$a\sin A+b\sin B+c\sin C$ 其中a、b、$c\in R^{+}$)的极值

令$f=a\sin A+b\sin B+c\sin C=a\sin A+b\sin B+c\sin(A+B)$

则$f_{AA}=-a\sin A-c\sin(A+B)$，$f_{AB}=-c\sin(A+B)$，$f_{BB}=-b\sin B-c\sin(A+B)$

$f_{AA}<0$，$f_{AB}{}^{2}-f_{AA}f_{BB}<0$

由引理4知：f 有极大值

根据拉格朗日乘数法

令$L=a\sin A+b\sin B+c\sin C-\lambda(A+B+C-\pi)$

令$\begin{cases}L_A=a\cos A-\lambda=0\\L_B=b\cos B-\lambda=0\\L_C=c\cos C-\lambda=0\\L_\lambda=-(A+B+C-\pi)=0\end{cases}$　即$\begin{cases}\cos A=\frac{\lambda}{a}\\\cos B=\frac{\lambda}{b}\\\cos C=\frac{\lambda}{c}\\A+B+C=\pi\end{cases}$

由引理2得$(\frac{\lambda}{a})^2+(\frac{\lambda}{b})^2+(\frac{\lambda}{c})^2+2\frac{\lambda^3}{abc}=1$

由盛金公式[6]解得$\lambda_1=-\frac{(1+2\cos\frac{\theta}{3})(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})}{\frac{6}{abc}}$

$$\lambda_2=-\frac{(1-\cos\frac{\theta}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3})(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})}{\frac{6}{abc}}$$

$$\lambda_3=-\frac{(1-\cos\frac{\theta}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3})(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})}{\frac{6}{abc}}$$

其中 $\theta=\arccos T$　$T=1-\frac{54}{(abc)^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})^3}$

下面考虑 $a\sin A+b\sin B+c\sin C$ 在D的闭包 $E=\{(\alpha,\beta,\gamma)\mid\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha\geq0,\beta\geq0,\gamma\geq0\}$上 的最大值。

由于所求问题存在极大值，故所求λ 中存在满足条件的λ，将满足条件的λ 分别代入求得函数值并与边界值$\max(\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+c^2},\sqrt{c^2+b^2})$进行比较，即可得出$a\sin A+b\sin B+c\sin C$ 的最大值。

2.2 对于△ABC，$a\cos A+b\cos B+c\cos C$（其中a、b、$c\in R^{+}$)的极值

根据拉格朗日乘数法

令 $L=a\cos A+b\cos B+c\cos C+\mu(A+B+C-\pi)$

令$\begin{cases}L_A=-a\sin A+\mu=0\\L_B=-b\sin B+\mu=0\\L_C=-c\sin C+\mu=0\\L_\lambda=A+B+C-\pi=0\end{cases}$　即$\begin{cases}\sin A=\frac{\mu}{a}\\\sin B=\frac{\mu}{b}\\\sin C=\frac{\mu}{c}\\A+B+C=\pi\end{cases}$

由$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$　得

$\frac{\mu}{c}=\frac{u}{a}\cos B+\frac{\mu}{b}\cos A$　$(\mu\neq0)$

即　$\frac{1}{c}-\frac{\cos B}{a}=\frac{\cos A}{b}$

两边平方得$\frac{1}{c^2}-\frac{2\cos B}{ac}+\frac{\cos^2 B}{a^2}=\frac{\cos^2 A}{b^2}$

即有$\cos B=\frac{ac}{2}\left[\frac{1}{c^2}-(\frac{1-\frac{\mu^2}{a^2}}{b^2}-\frac{1-\frac{\mu^2}{b^2}}{a^2})\right]=\frac{ac}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$

同理可得$\cos A=\frac{bc}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)$

$\cos C=\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)$

令$f=a\cos A+b\cos B+c\cos C=a\cos A+b\cos B+c\cos(A+B)$

则$f_{AA}=-a\cos A-c\cos(A+B)$，$f_{AB}=-c\cos(A+B)$，$f_{BB}=-b\cos B-c\cos(A+B)$

代入$\cos A$，$\cos B$，$\cos C$的值得$f_{AA}=abc(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2})$，

$f_{AB}{}^{2}-f_{AA}f_{BB}=(\frac{abc}{2})^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2})^2-(abc)^2(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2})(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2})$

由引理4知：当$f_{AA}<0$且$f_{AB}{}^{2}-f_{AA}f_{BB}<0$时$f$ 有极大值；

则$a\cos A+b\cos B+c\cos C$的极大值为$\frac{abc}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$

当 $f_{AA}>0$ 且 $f_{AB}{}^{2}-f_{AA}f_{BB}<0$时 f 有极小值；

则$a\cos A+b\cos B+c\cos C$的极小值为$\frac{abc}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$。

3 结语

三角函数最值问题题型丰富多彩，其解法也层出不穷。例如利用三角函数的有界性、换元法、判别式法、利用函数的单调性、对含参数的三角函数最值的分类讨论法、利用基本不等式法（如：和差化积与积化和差公式、均值不等式、柯西不等式）等都是解三角函数最值的常用手段，解决这类问题关键是在于对三角函数的灵活应用，抓住关键和本质所在。

注释及参考文献：

[1]数学教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书[M].北京：人民教育出版社，2004：35-40.

[2]裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,1993,267-287.

[3]杨学枝.关于三角形的两类不等式[J].湖南教育学院学报，1999,17(2):32-37.

[4]华东师范大学数学系.数学分析第三版[M].北京:高等教育出版社,2003.

[5]胡中双.浅谈高中数学教学中创造性思维能力的培养[J].湖南教育学院学报，2001,19(4):147-148.

The Solution to Maximum Value of a Special Class of Trigonometric Functions

ZHOU Gui-ru

(Department of Basic Teaching, Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou，Fujian 350007)

Abstract: For the maximum value of a trigonometric function $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ with special coefficients in △ABC , three solutions of analysis segment, the Lagrange multiplier, the inequalities, are first proposed, leading to the same result. Then for a general trigonometric function $a\sin A+b\sin B+c\sin C$ with the coefficients a,b, and c belonging to R^+, the Lagrange multiplier is used to seek its maximum value. Finally, the solution to the extreme value of the trigonometric function $a\cos A+b\cos B+c\cos C$ with the coefficients a, b, and c belonging to R^+ is derived.

Key words: Lagrange multiplier; analysis segment; extreme value

（上接第11页）

Galerkin Finite Element Numerical Solutions for the Hydromagnetic Boundary Layer Flow due to a Radially Stretching Surface

HU Min

(School of Mathematics and Computer Science, Panzhihua University, Panzhihua, Sichuan 617000)

Abstract: The shear stress of the steady two-dimensional boundary layer flow of a hydromagnetic flow due to a radially stretching surface is investigated. The boundary layer equations governing the flow are transformed into a singular equation by using suitable equivalent transformations. The equation is then turned to nonlinear equations by using Galerkin finite element method. At last, the numerical solutions for the nonlinear equations are estimated through Newton iterative method. It is obtained the shear stress of this fluid corresponding to the parameter M different values. Moreover, the results are compared with previous conclusions through table. It' s shown that the numerical results and previous solution is consistent. This means that the Galerkin finite element method is a good method to solve the hydromagnetic boundary layer flow.

Key words: radially stretching surface; hydromagnetic boundary layer flow; Galerkin finite element method; Newton iterative method; numerical solutions