归结原则的一个改进及应用*

李红梅
(四川文理学院 数学与财经学院,四川 达州 635000)

【摘 要】归结原则可将函数极限问题转化为数列极限问题。本文给出了较弱条件下的归结原则,讨论了归结原则在证明一类常数函数问题中的应用。

【关键词】归结原则;极限;常数函数
【中图分类号】0171 【文献标志码】A 【文章编号】1673-1891(2015)01-0022-03
DOI:10.16104/j.cnki.xccxb.2015.01.007

归结原则又称海涅(Heine)定理是沟通函数极限和数学极限的桥梁。在求数列或函数极限时,海涅定理起着重要作用[1]。华东师大教材第四版给出的归结原则的条件较强,实际上可将条件适当减弱。

1 归结原则的改进

华东师大版教材第四版是这样叙述归结原则的:

设函数$f(x)$在$U^0(x_0;\delta')$上有定义,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是:对任何含于$U^0(x_0;\delta')$且以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在且相等[2]。定理的条件可适当减弱,将"极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在且相等"减弱为"极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在",得到如下定理。

定理1 设函数$f(x)$在$U^0(x_0;\delta')$上有定义,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件是:对任何含于$U^0(x_0;\delta')$且以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}$,极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在。

证 必要性 已知函数$f(x)$在$U^0(x_0;\delta')$上有定义,存在。不妨设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,则对任意小的正数$\varepsilon$,都存在正数$\delta(\le\delta')$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$。

另一方面,设数列$\{x_n\}\subset U^0(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$,则对上述的$\delta>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时有$0<|x-x_0|<\delta$,从而有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$这就证明了极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在且都等于$A$。

充分性 任取两个数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$满足:

当$n\to\infty$时,$x_n\ne x_0$, $x_n\to x_0$, $y_n\ne x_0$ $y_n\to x_0$则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$都存在。构造数列$\{z_n\}$: $x_1,y_1,x_2,y_2,L\ ,x_n,y_n,L$

则由于数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$落在$U^0(x_0;\delta')$之外的项至多只有有限项,从而数列$\{z_n\}$落在$U^0(x_0;\delta')$之外的项至多只有有限项,于是$z_n\to x_0$且$z_n\ne x_0$,所以极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$存在。设$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{k\to\infty}f(z_{2k-1})=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{k\to\infty}f(z_{2k})=A$。

若$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\ne A$,即$\exists\varepsilon_0>0$,对任意$\delta>0$(不论多么小),总存在一点$x$,尽管$0<|x-x_0|<\delta$,但有$|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。

取$\delta_1=\delta'$,$\exists x_1\in U^0(x_0;\delta')$: $0<|x_1-x_0|<\delta_1$,但$|f(x_1)-A|\ge\varepsilon_0$,

$\delta_2=\frac{\delta'}{2}$,$\exists x_2\in U^0(x_0;\delta')$: $0<|x_2-x_0|<\delta_2$,但$|f(x_2)-A|\ge\varepsilon_0$,

$\delta_3=\frac{\delta'}{3}$,$\exists x_3\in U^0(x_0;\delta')$: $0<|x_3-x_0|<\delta_3$,但$|f(x_3)-A|\ge\varepsilon_0$,

……

$\delta_n=\frac{\delta'}{n}$,$\exists x_n\in U^0(x_0;\delta')$: $0<|x_n-x_0|<\delta_n$,但$|f(x_n)-A|\ge\varepsilon_0$。

于是得到数列$\{x_n\}$满足:$\{x_n\}\subset U^0(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\ne A$,与假设矛盾。所以必有极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$成立。

函数的单侧的归结原则也可以类似的减弱。函数的单侧的归结原则教材是这样叙述的:

设函数$f(x)$在点x_0的某空心邻域$U_+^0(x_0)$内有定义。$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$存在的充要条件是:对任何以$x_0$为极限的递减数列$\{x_n\}\subset U_+^0(x_0)$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。定理条件"$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$"可减弱为"极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在",于是得到如下定理:

定理2 设函数$f(x)$在$U_+^0(x_0;\delta')$内有定义,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在的充要条件是:对任何以$x_0$为极限的递减数列$\{x_n\}\subset U_+^0(x_0;\delta')$,极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在。

证 必要性 已知$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在,不妨设$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,则对$\forall\varepsilon>0$,$\exists$正数$\delta(\le\delta')$,当$x_0<x<x_0+\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$。设数列$\{x_n\}\subset U_+^0(x_0;\delta')$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,则对上述$\delta>0$,$\exists N>0$,当$n>N$时,有$x_0<x_n<x_0+\delta$,从而有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在且都等于$A$。

充分性 任取两个严格递减数列$\{a_n\}$,$\{b_m\}$满足:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$,$\lim\limits_{m\to\infty}b_m=x_0$。由已知有$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$与$\lim\limits_{m\to\infty}f(b_m)$都存在。按如下方法构造数列$\{c_n\}$:

令$c_1=a_1=a_{m_1}$,由数列$\{b_m\}$严格递减且$\lim\limits_{m\to\infty}b_m=x_0$知$\exists m_1\in N^+$,使$b_{m_1}<c_1$,

令$c_2=b_{m_1}$,由数列$\{a_n\}$严格递减且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$知$\exists n_2\in N^+$,使$a_{n_2}<c_2$,

收稿日期:2014-10-08
*基金项目:四川省哲学社会科学重点研究基地、四川省人文社会科学重点研究基地——西华师范大学四川省教育发展研究中心资助/立项项目:信息化视野下农村教师专业化发展研究(项目编号:CJF14059)。
作者简介:李红梅(1979-),女,四川乐至人,硕士,讲师,主要研究方向数学分析及数学教育。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

令 $c_3=a_{n_2}$,由数列$\{b_m\}$严格递减且$\lim\limits_{m\to\infty}b_m=x_0$知$\exists m_2\in N^+$,使$b_{m_2}<c_3$,

…… ……

令$c_{2k-1}=a_{n_k}$,由数列$\{b_m\}$严格递减且$\lim\limits_{m\to\infty}b_m=x_0$知$\exists m_k\in N^+$,使$b_{m_k}<c_{2k-1}$,

令$c_{2k}=b_{m_k}$,由数列$\{a_n\}$严格递减且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$知$\exists n_{k+1}\in N^+$,使$a_{n_{k+1}}<c_{2k}$,

于是得到数列$\{a_n\}$,$\{b_m\}$的子列$\{a_{n_k}\}$,$\{b_{m_k}\}$和严格递减数列$\{c_n\}$:

$$c_n=\begin{cases}a_{n_k},n=2k-1,\\ b_{m_k},n=2k\end{cases}。$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$,$\lim\limits_{m\to\infty}b_m=x_0$知$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=x_0$,$\lim\limits_{k\to\infty}b_{m_k}=x_0$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=x_0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}f(c_n)$存在。设$\lim\limits_{n\to\infty}f(c_n)=A$,则

$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{k\to\infty}f(a_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f(c_{2k-1})=A$ $\lim\limits_{m\to\infty}f(b_m)=\lim\limits_{k\to\infty}f(b_{m_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f(c_{2k})=A$

若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$不存在,则$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq A$,即$\exists\varepsilon_0>0$,对任意正数$\delta$(不论多么小),$\exists x\in U_+^0(x_0;\delta')$,但$|f(x)-A|\geq\varepsilon_0$。依次取$\delta$分别为$\delta',\frac{\delta'}{2},\frac{\delta'}{3},\text{L}\ ,\frac{\delta'}{n},\text{L}$,则存在相应的点$x_1,x_2,x_3,\text{L}\ \ ,x_n,\text{L}$ 。使$0<x_n-x_0<\delta$,$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0$,$n=1,2,3,\text{L}$ 。于是得到数列$\{x_n\}$满足:$x_n\subset U_+^0(x_0;\delta')$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$与假设矛盾。所以必有$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在且等于$A$。

类似的可得,函数在无限区间上的单侧归结原则。

定理3 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$内有定义,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在的充要条件是对任何以$+\infty$为极限的递增数列$\{x_n\}\subset[0,+\infty)$,极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$都存在。

2 应用

归结原则在求函数极限、证明函数极限及函数极限的相关性质等方面都有较好的应用。在证明一类常量函数问题中,可用归结原则较好的解决问题。现就如下几方面展开讨论。

命题1 若函数$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的周期函数,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,则$f(x)$为常量函数。

证 已知函数$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的周期函数,不妨设$f(x)$的周期为$T>0$。

对任意$x_0\in(-\infty,+\infty)$,取$x_n=x_0+nT$,$n=1,2,3,\text{L}$ 。

于是$f(x_n)=f(x_0+nT)=f(x_0)$,$n=1,2,3,\text{L}$ 。所以有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$

另一方面,因$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,不妨设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,由定理1归结原则有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

综上可知,$f(x_0)=A$。由于x_0是$(-\infty,+\infty)$中任意一点,所以$f(x)\equiv A$,即$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的常量函数。

推论1 若函数$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的周期函数,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,则$f(x)\equiv0$。

命题2 设函数$f(x)$对于$[0,+\infty)$内一切x满足等式$f(x^\alpha)=f(x)$,其中常数$\alpha>1$,且$f(x)$在$x=0$与$x=1$处连续。证明:$f(x)\equiv C$(常数),$x\in[0,+\infty)$。

证 由于$f(x^\alpha)=f(x)$,对任意$x\geq0$及$n\in N^+$,有

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{\alpha}})=f(x^{\frac{1}{\alpha^2}})=f(x^{\frac{1}{\alpha^3}})=\text{L}\ =f(x^{\frac{1}{\alpha^n}})=\text{L}$$

当$\alpha>1$时$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^n}=0$ 。因为$f(x)$在$x=1$处连续,故对任意 $x>0$由定理2归结原则有$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{\alpha^n}})=f(\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{\alpha^n}})=f(1)$。又由于$f(x)$在$x=0$处连续,因此

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(1)=f(1)$$

综上可知,$f(x)\equiv f(1)$,$x\in[0,+\infty)$。令$C\equiv f(1)$,C为常数。即$f(x)\equiv C$(常数),$x\in[0,+\infty)$ 。

推论2 设函数$f(x)$对于$(-\infty,+\infty)$内一切x满足等式$f(x^{2k})=f(x)$,其中$k>1$,且$f(x)$在$x=0$与$x=1$处连续。证明:$f(x)\equiv C$(常数),$x\in(-\infty,+\infty)$。

证 由命题2知$f(x)$为$[0,+\infty)$上的常量函数,且$f(x)\equiv f(1)$。对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$,由$f(x^{2k})=f(x)$有$f(-x)=f[(-x)^{2k}]=f(x^{2k})=f(x)$,即$f(x)$是偶函数。从而对任意$x\in(-\infty,0]$,有$f(x)=f(-x)=f(1)$。于是$f(x)\equiv f(1)$,$x\in(-\infty,+\infty)$。令$C\equiv f(1)$,$C$为常数。即$f(x)\equiv C$(常数),$x\in(-\infty,+\infty)$。

命题3 设函数$f(x)$对于$[0,+\infty)$内一切x满足等式$f(\alpha x)=f(x)$,其中常数$\alpha>1$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,则$f(x)\equiv\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$(常数),$x\in[0,+\infty)$ 。

证 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,记$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。即证明$f(x)\equiv A$(常数),$x\in[0,+\infty)$ 。

反证法。假设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上不恒为A,则必存在一点$x_0\in[0,+\infty)$,使得$f(x)=B\neq A$。因为$f(x)$对于$[0,+\infty)$内一切x满足等式$f(\alpha x)=f(x)$,于是对于任意自然数n有

$$f(x_0)=f(\alpha x_0)=f(\alpha^2x_0)=f(\alpha^3x_0)=\text{L}\ =f(\alpha^nx_0)=\text{L}$$

从而得到数列$\{\alpha^nx_0\}$满足:$\{\alpha^nx_0\}$递增且$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^nx_0=+\infty$,其中常数$\alpha>1$ 。所以$\lim\limits_{n\to\infty}f(\alpha^nx_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0)=B$ 。又因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,由定理3归结原则有$\lim\limits_{n\to\infty}f(\alpha^nx_0)=A$。即$\lim\limits_{n\to\infty}f(\alpha^nx_0)=B$又$\lim\limits_{n\to\infty}f(\alpha^nx_0)=A$,则$B=A$。这与假设矛盾。故$f(x)\equiv\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$(常数),$x\in[0,+\infty)$ 。

特别地,当$\alpha=2$时,有

若函数$f(x)$对于$[0,+\infty)$内一切x满足等式$f(2x)=f(x)$且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则$f(x)\equiv A$,$x\in[0,+\infty)$ 。[3]

推论3 设函数$f(x)$对于$(-\infty,0]$内一切x满足等式$f(\alpha x)=f(x)$,其中常数$\alpha>1$,且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在,则$f(x)\equiv\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$(常数),$x\in(-\infty,0]$ 。

命题4 设函数$f(x)$对于$(0,+\infty)$内一切x满足等式

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$f(x^{\alpha})=f(x)$,其中常数$\alpha>1$,且$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$,则$f(x)\equiv f(1)$, $x\in(0,+\infty)$。

证 反证法。假设$f(x)$在$(0,+\infty)$上不恒为$f(1)$,则必存在一点$x_0\in(0,+\infty)$,使得$f(x_0)\neq f(1)$。已知$f(x)$对于$(0,+\infty)$内一切x满足等式$f(x^{\alpha})=f(x)$,于是对任意自然数n有

$$f(x_0)=f(x_0^{\alpha})=f(x_0^{\alpha^2})=f(x_0^{\alpha^3})=\text{L}=f(x_0^{\alpha^n})=\text{L}$$ 。

得到数列$\{x_0^{\alpha^n}\}\subset(0,+\infty)$。当常数$\alpha>1$时,

(1)若$x_0\in(0,1)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_0^{\alpha^n}=0$。于是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0^{\alpha^n})=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0)=f(x_0)$。另一方面,已知$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(1)$,由定理2归结原则可知$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0^{\alpha^n})=\lim\limits_{x_0\to 0^+}f(x_0)=f(1)$。由此可得,$f(x_0)\equiv f(1)$, $x_0\in(0,1)$。

(2)若$x_0\in(1,+\infty)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_0^{\alpha^n}=+\infty$。于是$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0^{\alpha^n})=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0)=f(x_0)$。另一方面,已知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$,由定理3归结原则可知$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0^{\alpha^n})=\lim\limits_{x_0\to+\infty}f(x_0)=f(1)$。由此可得,$f(x_0)\equiv f(1)$, $x_0\in(1,+\infty)$。

综上可知,不论$x_0\in(0,1)$还是$x_0\in(1,+\infty)$,都有$f(x_0)\equiv f(1)$。这与假设矛盾。

故$f(x)\equiv f(1)$, $x\in(0,+\infty)$。

推论4 设函数$f(x)$对于$(-\infty,0)$内一切x满足等式$f(x^{\alpha})=f(x)$,其中常数$\alpha>1$,且$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=f(-1)$,则$f(x)\equiv f(-1)$, $x\in(-\infty,0)$。

注释及参考文献:

[1]吴少祥,余庆红.海涅定理及其应用[J].高等数学研究,2007,10(5):30-32.

[2]华东师范大学数学系编.数学分析(上册)[M].北京:高等教育出版社,2011:54.

[3]杜其奎,陈金如,等著.数学分析精讲讲义(上册)[M].北京:科学出版社,2012:80.

An Improvement and Application of Generalization Principle

LI Hong-mei

(Department of Maths and Finance-Economics, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou, Sichuan 635000)

Abstract: The function limit problem can be converted to the limits the number of columns. This paper gives generalization principle under weaker conditions and discusses application of the generalization principle in certify a class of constant function.

Key words: generalization principle; limit; constant function

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net