“形”“意”结合促进概念教学——以定积分概念为例

李红梅,张晓梅
(四川文理学院 数学与财经学院,四川 达州 635000)

【摘　要】数学概念教学应该注重概念的“形”与“意”相结合。数学概念教学可从如下几方面思考:概念的本质,概念的过程,概念的思想,概念的结构以及概念的应用等。

【关键词】数学概念;形;意;定积分
【中图分类号】O172.2-4 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)02-0151-03

许多数学概念是非常有魅力的,然而学生对数学概念的掌握却困难重重。通过概念教学,想让学生学到什么,达到什么目标,怎样达到目标,值得每个从事数学教育的工作者深思。

1 现状

数学概念学习中,常见一种现象:“会而不懂,懂而不会”,即会字面背诵、简单模仿、简单应用,但缺乏思想性、方法性知识等。“会而不懂”,实际上是会简单机械模仿操作,但对其中的原理、思想并不懂,是“依葫芦画瓢”。如学生会用极限的“$\varepsilon-N$”、“$\varepsilon-\delta$”语言形式按教材的步骤按部就班的证明简单习题,但稍加变化的题就不会了,学生缺乏对基本思想、规律的感悟。“懂而不会”是浅层次的理解其含义,并非真懂其本质、思想方法等,如定积分的概念,学生知道定积分“分割——近似——求和——取极限”的过程,但不会运用定积分的概念求解问题;又如“知道”函数一致连续的表述,其中的δ只与ε有关,与自变量无关,但就是不会解决一致连续相关的问题等等。数学概念教学应注重概念的“形”与“意”相结合。学生缺乏对概念“意”的理解及获得,是学生缺乏创造能力的主要根源。因此教学中要注意对概念“意”的挖掘、对“意”的概括、对“意”在不同情境中应用做出引导、示范。同时,要注意不过度强调概念的“形”,但也不缺失“形”的必要操作。数学概念教学中“形”与“意”的割裂是“会而不懂,懂而不会”的主要原因。

2 基本思路

数学学习有三个层面:作为理论思维的数学;作为技术应用的数学;作为文化修养的数学,这三个层次对不同的人有不同的含义和不同的作用。由于数学概念的定义方式方法不同,要“静态”与“动态”相结合去剖析概念的“形”“意”全貌,注重概念的思想性、方法性的内容。对陈述性概念(如角、圆、方程、不等式、整数、直线、平面、一元二次方程等)可用静态思想去讨论。程序性概念包含一种操作或包含一种操作的结果。如余数、积的乘方、最简分数、加、减、乘、除、导数、微分、梯度、通分、分母有理化、分解因式、消元、配方、极限、连续、积分等等。对程序性概念往往需要动态与静态相结合的方法去讨论。

3 概念的五个方面

希尔伯特(D.Hilbert.1862-1943)认为“了解一种理论的最好方法是先找出、然后再研究这种理论的原形的具体例子”。数学家阿蒂亚(英国的数学家、菲尔兹奖获得者M.F.Atiyan,1929-)“愿意向学数学者提出最有用的建议,就是对响当当的大定理问问有无特殊情形,既简单又不无聊”。数学概念的意义是从多种情境中提取出来的。进行数学概念教学时设置不同的、贴近学生实际的情境,在具体情境中体验数学概念的产生、形成、发展是一条好思路。

3.1 概念的本质

抓住概念的本质是概念教学中最重要、最基本的、最主要的任务。定积分概念的产生来自于集合中求不规则图形的面积,来自于物理学中变速运动物体的距离问题。

定积分概念的本质是特殊结构的和式的极限,即$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$。定积分概念中$\varepsilon-\delta$定义不同于数列极限、函数极限定义中的$\varepsilon-\delta$。其特殊性体现在如下几个方面:与数列极限、函数不同,$\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$不能像数列那样按一定顺序排列起来。原因:(1)对不同的分割T、T'不能建立排列顺序,从而与之对应的和式σ_n、σ'_n无法按分割的顺序排列。(2)对不同的分割T、T'可能对应同一

收稿日期:2014-02-22
作者简介:李红梅(1979-),女,四川乐至县人,硕士,讲师,主要从事数学课程与教学论与数学分析研究。

个 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i'\}$ 。(3)在同一个分割中，ξ_i 是任意选择的，故 $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 不唯一。所以，和式 $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 无法按细度 λ 的大小排列，也不能看作以分割 T 或细度 λ 为自变量的单值函数。从而很难从数列极限、函数极限的角度去理解、同化定积分的概念。定积分概念的学习是一个以顺应为主的心理过程。

3.2 概念的过程

“真正有意义的数学，是由直观想象与演绎推理相结合而创造出来的。”动态的过程演示和分析。动态演示过程是认识定积分“形”的过程，是由形象思维所构成的认识活动，具有直观想象、猜想、直觉等特征。“数学教学是数学活动（思维活动）的教学而不仅仅是数学活动的结果——数学知识的教学”。（原苏联数学教育家斯托利亚尔）

定积分概念的原形可分为：几何原形——如曲边梯形的面积、物理原形——如变速直线运动的路程、历史原形——如古希腊欧多克索斯的“穷竭法”、中国古代刘薇的割圆术、17世纪开普勒的“无限小元素法”等等。

定积分概念的产生过程中有三步。首先，近似。如用一个矩形的面积近似曲边梯形的面积。这也是积分中值定理的精髓所在，用一个恰当的矩形的面积表示曲边梯形的面积。其次，提高精度，减小误差——逼近。用一列矩形的面积的和去逼近曲边梯形的面积，将曲边梯形的面积限制在可求得的两类矩形面积和（上和 $S(T)$ 与下和 $s(T)$）之间，而不是用另一个矩形面积去代替曲边梯形面积。这也是积分思想不同于一般逼近法的地方。再次，去除误差，达到精确——取极限。运用运动的观点剖析去边梯形的生成过程可知，在自变量充分小的范围内，引起函数变化也是充分小的。因此运用极限的方法，当自变量的增量趋于0时，引起的函数增量也趋于0，这时上和 $S(T)$ 与下和 $s(T)$ 之差趋于0，由夹逼思想可得曲边梯形的面积。经过这一具体例子的分析，进一步抽象成数学模型，得出定积分的概念。

动态分析过程是以抽象思维为主的认知活动，其结果就是概念的“意”。定积分概念形成的过程，充满了观察、比较、猜想、描述、归纳、抽象等火热的思考。在这过程中体现了数学的研究方法，即如何提出数学问题，如何解决数学问题，对解问题有了解决思想后，要有具体的方法，进而要有可操作的表达式（即可运算、表达的公式、法则、定理、性质）；分析清楚问题中存在确定的依存关系后，下一步就是揭示它，进一步将这种关系具体化。也就是说有了解决问题的“意”，还需表达解决方案的“形”。这样才算是真正的解决了问题，也才能将解决方案推广应用到更广泛的地方。

在这个过程中激励学生直观形象的解析与数值的思考结合起来，获得一种理解数学和现实世界中各种关系的思想方法。

3.3 概念的思想

定积分概念所展示的思想方法是深层次的知识，是定积分的“意”，是形成智慧、智能等创造能力所必须的知识基础。定积分概念的形成过程中体现了一种数学思想：化整为零，积零为整，运用运动的观点从宏观到微观看问题，可以说体现了一种哲学思想。将运动分割得充分小可近似为静止，变速运动在充分小的时间单位里可近似为匀速运动，曲线在分割得充分小的范围上可近似为直线，非均匀物质在分割的充分小的范围内可近似为均匀分布的，等等。定积分的思想是将运动的、变化的、不规则的对象，利用分割的方法，转移到充分小的地方，再用已知的、熟悉的静止的、不变的、规则的问题的处理方法去近似处理，再利用极限的工具处理“近似”，从而达到精确，是用有限的过程处理无限的问题，用离散的过程逼近连续，如以直代曲、局部线性化等。定积分的这种“和式的极限”的思想在物理、工程技术即其他知识领域以及人们的生产时间活动中具有普遍的意义。定积分思想可以说是一种思维方式，告诉我们认识未知、把握未知、改变未知的一种思想，一种方法。

3.4 概念的结构

概念的结构即概念间的联系。这时对概念进行静态的结构分析。概念间的逻辑关系有数学中的各种关系（运算、逻辑连接、变换等）以及各种抽象（强抽象、弱抽象、广义抽象）等。

曲边梯形的面积是用定积分来定义，同时给出其求法，具有一定的可操作性，但有些繁琐。在给出牛顿——莱布尼茨公式后，其计算就化归为求被积函数的原函数的函数值之差，操作性强。

$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $\int f(x)dx=F(x)+C$，C是任意常数。

定积分的定义表达式是无穷小求和思想：化整为零，积零为整，其本质是一个和式的极限。牛顿——莱布尼茨公式实质上是变化率的思想：函数值增量。从定积分的概念到牛顿——莱布尼茨公式的过程

$$
\begin{tikzcd}
 & & \int f(x)\,dx = F(x)+C & \\
 & & \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \arrow[u] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \int_a^x f(t)\,dt \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma \\
\int_a^{+\infty} f(x)\,dx & \int_a^{a(x)} f(t)\,dt \arrow[d] & \int_x^b f(t)\,dt & \\
 & \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt & \int_{b(x)}^{b} f(t)\,dt \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

中,需要函数的思想考查变上限函数 $\int_a^x f(t)\,dt$,为何可将 $\int_a^x f(t)\,dt$ 看作是 x 的函数,再考察变上限函数的导数,进而转到不定积分——被积函数的原函数,再到原函数的函数值增量。进一步将定积分概念进行拓展,将积分限由常量拓展为变量(如 $\int_a^x f(t)\,dt$、$\int_a^{a(x)} f(t)\,dt$、$\int_x^b f(t)\,dt$、$\int_{b(x)}^b f(t)\,dt$、$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$),甚至拓展为在无限区间上的积分(如 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$)、无界函数的积分(如瑕积分),多元函数的积分(如二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ 等),点出黎曼积分的缺陷,引导学生寻找解决思路——勒贝格积分。

3.5 概念的应用

概念的应用是拆开“形”与“意”的有效方法。从认知过程讲,心理学家罗斯认为,记忆中的种种概念,是以这些概念的例子来表示的,而不是以某些抽象的规则或者一系列相关特征来表示的[2]。应用概念前一定明白定积分的几何意义、物理意义、经济学意义等。定积分概念体现为“微元积累”。曲边梯形的面积是小曲边梯形面积的和,是面积微元的积累;质量是质量微元的积累。应用时要注意考查条件是否符合,即考察函数的可积条件等。应用定积分的概念可以求 n 项和数列的极限、旋转体的体积、面积、非均匀物体的质量及转动惯量、非均匀速度的运动问题等等。应用定积分的思想方法解决问题是用连续研究离散的典型方法。从概念的形成过程中看到,对象是可以分割的,且不受分法及点的取法的影响。另一方面,对象还要具备将分割后的东西累加得起来。在应用中突破模仿思维和再现思维阶段,激发创造力。

凸显数学概念的思维性、技能性、文化性对教师的数学素养提出了更高的要求。数学教师要从微观上对数学知识达到准确、深刻的理解;要从宏观上正确把握数学知识整体结构;要认识到显性知识背后隐性的思想方法;要认识到数学中某些知识的拓展知识;要把握数学知识“来龙去脉”的过程;要通过“追问”以形成正确认识,获得深刻理解,拓展学科知识,拥有较高观点;要认识到知识的文化内涵等等。

注释及参考文献:

[1]张顺燕.数学教育与数学文化[J].数学通报,2005(1):4.
[2]施良方.学习论[M].北京:人民教育出版社,1994:245.

Combination of Form and Meaning to Promote Concept of Teaching ——Based on Definite Integral Concept

LI Hong-mei, ZHANG Xiao-mei

(Department of Mathematics and Finance-Economics, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou, Sichuan 635000)

Abstract: Mathematical concepts teaching should focus on the combination of " form" and "meaning ", which can be thought from the following aspects: the essence of the concept, the process of the concept, the idea of the concept, the structure of the concept and the application of the concept.

Key words: mathematical concepts; form; meaning; the definite integral