第28卷第2期　　西昌学院学报·自然科学版　　Vol.28,NO.2
2014年6月　　Journal of Xichang College·Natural Science Edition　　Jun.,2014

一类数列求通项问题的矩阵解法*

陈　佳,唐海军,苟　格,向虹燃
(四川文理学院 数学与财经学院,四川 达州 635000)

【摘　要】数列在中学数学竞赛和数学建模等一些重要领域都有非常重要的应用.此研究尝试从矩阵的角度来解决一类递推关系为多元一次方程组的数列$\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\},\cdots\{a_n^{(t)}\}$的通项问题,有助于拓宽数列求通项的方法。

【关键词】递推关系;多元一次方程组;矩阵
【中图分类号】O141.2　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2014)02-0031-03

1 引言

数列是竞赛数学的重要内容,在初等数学与高等数学间起到承上启下的作用[1]。利用矩阵求解数列通项的研究[2-5],主要集中在递推关系式为单个线性递推式或者分式形式递推式方面,文献[6]研究了递推式组确定两个或三个数列的通项公式,对于由个递推式所构成的递推式组求通项问题尚缺乏研究。

2 预备知识

已知数列$\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\},\cdots\{a_n^{(t)}\}$中(注:$\{a_n^{(s)}\}$中的$a_n^{(s)}$只是个记号),满足:$a_1^{(1)},a_1^{(2)},\cdots a_1^{(t)}$为已知常数,且

$$\begin{cases}a_{n+1}^{(1)}=R_{11}a_n^{(1)}+R_{12}a_n^{(2)}+\cdots R_{1t}a_n^{(t)}+C_1\\ a_{n+1}^{(2)}=R_{21}a_n^{(1)}+R_{22}a_n^{(2)}+\cdots R_{2t}a_n^{(t)}+C_2\cdots\cdots(1)\\ \cdots\\ a_{n+1}^{(t)}=R_{t1}a_n^{(1)}+R_{t2}a_n^{(2)}+\cdots R_{tt}a_n^{(t)}+C_t\end{cases}$$

为引入矩阵,先去掉常数项$C_1,C_2,\cdots,C_t$,并作如下变换:$a_n^{(s')}=a_n^{(s)}+C_s'(s=1,2,\cdots t)\cdots\cdots(2)$

即:$a_n^{(s)}=a_n^{(s')}-C_s'\quad(s=1,2,\cdots t)\cdots\cdots(3)$

有

$$\begin{cases}a_{n+1}^{(1')}-C_1'=R_{11}a_n^{(1')}+R_{12}a_n^{(2')}+\cdots R_{1t}a_n^{(t')}+C_1-R_{11}C_1'-R_{12}C_2'-\cdots-R_{1t}C_t'\\ a_{n+1}^{(2')}-C_2'=R_{21}a_n^{(1')}+R_{22}a_n^{(2')}+\cdots R_{2t}a_n^{(t)}+C_2-R_{21}C_1'-R_{22}C_2'-\cdots-R_{2t}C_t'\cdots\cdots(4)\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n+1}^{(t)}-C_t'=R_{t1}a_n^{(1')}+R_{t2}a_n^{(2')}+\cdots R_{tt}a_n^{(t')}+C_t-R_{t1}C_1'-R_{t2}C_2'-\cdots-R_{tt}C_t'\end{cases}$$

即:

$$\begin{cases}a_{n+1}^{(1')}=R_{11}a_n^{(1')}+R_{12}a_n^{(2')}+\cdots R_{1t}a_n^{(t')}+C_1-(R_{11}-1)C_1'-R_{12}C_2'-\cdots-R_{1t}C_t'\\ a_{n+1}^{(2')}=R_{21}a_n^{(1')}+R_{22}a_n^{(2')}+\cdots R_{2t}a_n^{(t')}+C_2-R_{21}C_1'-(R_{22}-1)C_2'-\cdots-R_{2t}C_t'\cdots\cdots(5)\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n+1}^{(t')}=R_{t1}a_n^{(1')}+R_{t2}a_n^{(2')}+\cdots R_{tt}a_n^{(t')}+C_t-R_{t1}C_1'-R_{t2}C_2'-\cdots-(R_{tt}-1)C_t'\end{cases}$$

只需取:

$$\begin{cases}C_1-(R_{11}-1)C_1'-R_{12}C_2'-\cdots-R_{1t}C_t'=0\\ C_2-R_{21}C_1'-(R_{22}-1)C_2'-\cdots-R_{2t}C_t'=0\cdots\cdots\cdots(6)\\ \cdots\cdots\cdots\\ C_t-R_{t1}C_1'-R_{t2}C_2'-\cdots-(R_{tt}-1)C_t'=0\end{cases}$$

记:$R=\begin{bmatrix}R_{11}&R_{12}&\cdots&R_{1t}\\ R_{21}&R_{22}&\cdots&R_{2t}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ R_{t1}&R_{t2}&\cdots&R_{tt}\end{bmatrix}_{t\times t}$,$E=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\ 0&1&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&\cdots&1\end{bmatrix}_{t\times t}$

由克拉默(Camer)法则可得(6)式的解为:

$$C_1'=\frac{|D_1|}{|R-E|}\,C_2'=\frac{|D_2|}{|R-E|}\cdots\ C_t'=\frac{|D_t|}{|R-E|}$$

其中$D_s=\begin{bmatrix}R_{11}-1&R_{12}&\cdots&R_{1,s-1}&C_1&R_{1,s+1}&\cdots&R_{1t}\\ R_{21}&R_{22}-1&\cdots&R_{2,s-1}&C_2&R_{2,s+1}&\cdots&R_{2t}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ R_{s1}&R_{s2}&\cdots&R_{s,s-1}&C_s&R_{s,s+1}&\cdots&R_{st}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ R_{t1}&R_{t2}&\cdots&R_{t,s-1}&C_t&R_{t,s+1}&\cdots&R_{tt}-1\end{bmatrix}$

将C_s'(s=1,2,⋯,t)代入(5)式中:有

$$\begin{cases}a_{n+1}^{(1')}=R_{11}a_n^{(1')}+R_{12}a_n^{(2')}+\cdots R_{1t}a_n^{(t')}\\ a_{n+1}^{(2')}=R_{21}a_n^{(1')}+R_{22}a_n^{(2')}+\cdots R_{2t}a_n^{(t')}\cdots\cdots\cdots(7)\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n+1}^{(t')}=R_{t1}a_n^{(1')}+R_{t2}a_n^{(2')}+\cdots R_{tt}a_n^{(t')}\end{cases}$$

事实上,只需从(7)式中求解出$a_{n+1}^{(1')},a_{n+1}^{(2')},\cdots,a_{n+1}^{(t')}$由(3)式便可求出$a_{n+1}^{(1)},a_{n+1}^{(2)},\cdots,a_{n+1}^{(t)}$。

(7)式又等价于:$(a_{n+1}^{(1')},a_{n+1}^{(2')},\cdots a_{n+1}^{(t')})^T=R(a_n^{(1')},a_n^{(2')},\cdots a_n^{(t')})^T$

故有:$(a_n^{(1')},a_n^{(2')},\cdots a_n^{(t')})^T=R(a_{n-1}^{(1')},a_{n-1}^{(2')},\cdots a_{n-1}^{(t')})^T$,

$(a_{n-1}^{(1')},a_{n-1}^{(2')},\cdots a_{n-1}^{(t')})^T=R(a_{n-2}^{(1')},a_{n-2}^{(2')},\cdots a_{n-2}^{(t')})^T$,

……

$(a_2^{(1')},a_2^{(2')},\cdots a_2^{(t')})^T=R(a_1^{(1')},a_1^{(2')},\cdots a_1^{(t')})^T$

收稿日期:2014-01-07
*基金项目:2013年国家级大学生创新训练项目"基于光线强弱控制节能灯的数学模型研究"(项目编号:201310644005);2013年四川省教育厅资助课题"灰色数理模型在茶叶产业开发中的应用研究-以万源市富硒茶开发为例"(项目编号:14ZB0312);2013年四川文理学院教育教学改革研究项目"基于课改理念的数学专业选修课程建设与教学研究"(项目编号:2013JY45)。
作者简介:陈佳(1992-),男,四川营山人,本科生,研究方向:数学与应用数学。

$$(a_{n+1}^{(1')}, a_{n+1}^{(2')}, \cdots a_{n+1}^{(t')})^T = R^n (a_1^{(1')}, a_1^{(2')}, \cdots a_1^{(t')})^T \cdots\cdots (8)$$

在(8)式中$(a_1^{(1')},a_1^{(2')},\cdots a_1^{(t')})^T$，可由已知条件和(2)式求得，主要问题便是如何求得R^n。由于R为一个n级实矩阵，由文献[7]知，总存在一个t级可逆矩阵T，使得$T^{-1}RT$成对角形矩阵。记：$T^{-1}RT = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_t \end{bmatrix}$

故：$(T^{-1}RT)^n = (T^{-1}RT)(T^{-1}RT)\cdots(T^{-1}RT) = T^{-1}R^nT = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_t \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} L_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2^n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_t^n \end{bmatrix}$

即 $R^n = T\begin{bmatrix} L_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2^n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_t^n \end{bmatrix}T^{-1}$ 将其代入(8)式.有：

$$(a_{n+1}^{(1')}, a_{n+1}^{(2')}, \cdots a_{n+1}^{(t')})^T = T\begin{bmatrix} L_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2^n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_t^n \end{bmatrix}T^{-1}(a_1^{(1')}, a_1^{(2')}, \cdots a_1^{(t')})^T \cdots\cdots (9)$$

由(9)式便可求出：$\{a_{n+1}^{(1')}\},\{a_{n+1}^{(2')}\},\cdots\{a_{n+1}^{(t')}\}$，由(3)式就可求出$\{a_{n+1}^{(1)}\},\{a_{n+1}^{(2)}\},\cdots\{a_{n+1}^{(t)}\}$，故而求出$\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\},\cdots\{a_n^{(t)}\}$。

3 应用

例：设数列$\{a_n\},\{b_n\}$，满足$a_0=1,b_0=0$且

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3 \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4 \end{cases} (n = 0,1,2\cdots)$$

求：数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项，并求证a_n是完全平方数[8]。(2000年高中联赛试题)

对于该问题可以用代入法和特征根方法求解。同时，根据数列递推关系式的特点，也可以考虑利用矩阵来求解该问题。

解：令$a_{n+1}' = a_{n+1} + C_1; b_{n+1}' = b_{n+1} + C_2 \cdots\cdots (1)$

有$\begin{cases} a_{n+1}' - C_1 = 7(a_n' - C_1) + 6(b_n' - C_2) - 3 \\ b_{n+1}' - C_2 = 8(a_n' - C_1) + 7(b_n' - C_2) - 4 \end{cases}$ 即：$\begin{cases} a_{n+1}' = 7a_n' + 6b_n' - 3 - 6C_1 - 6C_2 \\ b_{n+1}' = 8a_n' + 7b_n' - 4 - 8C_1 - 6C_2 \end{cases} \cdots\cdots (2)$

取：$\begin{cases} -3 - 6C_1 - 6C_2 = 0 \\ -4 - 8C_1 - 6C_2 = 0 \end{cases}$ 得$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = 0 \end{cases} \cdots\cdots (3)$

(3)式代入(2)式有：$\begin{cases} a_{n+1}' = 7a_n' + 6b_n' \\ b_{n+1}' = 8a_n' + 7b_n' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad (a_{n+1}', b_{n+1}')^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}(a_n', b_n')^T \cdots\cdots (4)$ 于是有：

$$(a_n', b_n')^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}(a_{n-1}', b_{n-1}')^T$$

……

$$(a_2', b_2')^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}(a_1', b_1')^T$$

$$(a_1', b_1')^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}(a_0', b_0')^T$$

上述式子叠乘。有$(a_{n+1}', b_{n+1}')^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}^{n+1}(a_0', b_0')^T \cdots\cdots (5)$

$$a_0' = a_0 + C_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; b_0' = b_0 + C_2 = 0 + 0 = 0$$

记：$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$，下求$A$的特征值：

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & -6 \\ -8 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)^2 - 48 = 0$，所以$\lambda_1 = 7 + 4\sqrt{3}; \lambda_2 = 7 - 4\sqrt{3}$

其次求属于$\lambda_1 = 7 + 4\sqrt{3}$的特征向量。

$\begin{cases} 4\sqrt{3}x_1 - 6x_2 = 0 \\ -8x_1 + 4\sqrt{3}x_2 = 0 \end{cases}$，解得基础解系：$\alpha_1 = (\sqrt{3}, 2)$

再求属于$\lambda_2 = 7 - 4\sqrt{3}$的特征向量。

$\begin{cases} -4\sqrt{3}x_1 - 6x_2 = 0 \\ -8x_1 - 4\sqrt{3}x_2 = 0 \end{cases}$，解得基础解系：$\alpha_2 = (-\sqrt{3}, 2)$

取：$T = (\alpha_1^T, \alpha_2^T) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，有 $T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 7-4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$(T^{-1}AT)^{n+1} = T^{-1}A^{n+1}T = \begin{bmatrix} 7+4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 7-4\sqrt{3} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} (7+4\sqrt{3})^{n+1} & 0 \\ 0 & (7-4\sqrt{3})^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$A^{n+1} = T\begin{bmatrix} 7+4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 7-4\sqrt{3} \end{bmatrix}^{n+1}T^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (7+4\sqrt{3})^{n+1} & 0 \\ 0 & (7-4\sqrt{3})^{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(7+4\sqrt{3})^{n+1} + \frac{1}{2}(7-4\sqrt{3})^{n+1} & \frac{\sqrt{3}}{4}(7+4\sqrt{3})^{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{4}(7-4\sqrt{3})^{n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(7+4\sqrt{3})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}(7-4\sqrt{3})^{n+1} & \frac{1}{2}(7+4\sqrt{3})^{n+1} + \frac{1}{2}(7-4\sqrt{3})^{n+1} \end{bmatrix}$$

将A^{n+1}代入(5)式中，有：$(a_{n+1}', b_{n+1}')^T = A^{n+1}(\frac{1}{2}, 0)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}[(7+4\sqrt{3})^{n+1} + (7-4\sqrt{3})^{n+1}] \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}[(7+4\sqrt{3})^{n+1} - (7-4\sqrt{3})^{n+1}] \end{bmatrix}$

即：$a_{n+1}' = \frac{1}{4}[(7+4\sqrt{3})^{n+1} + (7-4\sqrt{3})^{n+1}], b_{n+1}' = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(7+4\sqrt{3})^{n+1} - (7-4\sqrt{3})^{n+1}]$

由(1)知：$a_{n+1} = a_{n+1}' - C_1 = \frac{1}{4}[(7+4\sqrt{3})^{n+1} + (7-4\sqrt{3})^{n+1}] + \frac{1}{2}$

$$b_{n+1} = b_{n+1}' - C_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(7+4\sqrt{3})^{n+1} - (7-4\sqrt{3})^{n+1}]$$

故：$a_n = \frac{1}{4}[(7+4\sqrt{3})^n + (7-4\sqrt{3})^n] + \frac{1}{2}, b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(7+4\sqrt{3})^n - (7-4\sqrt{3})^n]$

由上知：$a_n = \frac{1}{4}[(7+4\sqrt{3})^n + (7-4\sqrt{3})^n] + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}[(2+\sqrt{3})^{2n} + (2-\sqrt{3})^{2n}] + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{4}[(2+\sqrt{3})^{2n} + (2-\sqrt{3})^{2n} + 2] = \frac{1}{4}[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]^2$$

又因为$(2+\sqrt{3})^n$与$(2-\sqrt{3})^n$之和是正偶数，所以，a_n是完全平方数。

4 结语

从以上可以看到对于数列的递推式为二元一次方程组的问题，可以运用矩阵来求解其通

项。这种结题的思路,有助于探讨数列递推关系式为n元一次方程组的问题,为后面研究递推关系式为n元高次方程组的数列通项提供借鉴。

注释及参考文献:

[1]唐海军,郭春丽,李玲.高等数学观下的递推数列通项公式的求解[J].宜春学院学报,2013,35(6):33-36.

[2]刘祖望.常系数递归数列通项公式的矩阵求法[J].重庆教育学院学报,2005,18(6):11-12.

[3]李信明.常系数线性递推数列通项公式的矩阵求法[J].高等数学研究,1999(4):23-25.

[4]晏忠红,左丁丁.矩阵理论在求分式线性递推数列通项公式中的应用[J].井冈山学院学报(自然科学版),2007,28(10):29-31.

[5]周立仁.k阶线性递归数列的通项公式的矩阵求法[J].湖南理工学院学报,2011,4(3):24-26.

[6]陈泽凡.用矩阵求递推数列的通项公式[J].益阳师专学报(自然科学版),1991(1):27-33.

[7]北京大学数学系几何与代数研究室.高等代数(第三版)[M].北京:高等教育出版社,2003:189,379.

[8]陈传理,张国君.竞赛数学教程[M].北京:高等教育出版社,2010:104-105.

Method for Matrix Solution in a Class of Sequences General Term

CHEN Jia, TANG Hai-jun, GOU Ge, XIANG Hong-ran

(College of Math and Finance-Economics, Sichuan University of Arts and Science, Dazhou, Sichuan 635000)

Abstract: The sequence has very important application in math's competition of high school and mathematical modeling. This research attempts to solve a class of recurrence relations for the general problem of linear equation group series from the perspective of matrix. The new solution has deepened our knowledge of sequences general term.

Key words: recurrence relationship; linear equation group; matrix.