一类关于A—单调算子的广义变分包含组

阿力非日
（西昌学院 彝语言文化学院,四川 西昌 615022）

【摘 要】在Hilbert空间中,引入并研究了一类新的关于A-单调算子的广义变分包含组问题,利用不动点定理证明了这类广义变分包含组解的存在性和唯一性,并且利用A-单调映像的预解算子技巧研究了这类变分包含组解的迭代算法逼近,及由算法生成的迭代序列的收敛性。

【关键词】A-单调算子;变分包含组;预解算子;解的存在性;迭代算法
【中图分类号】O177.1 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)02-0028-03

1 预备知识

设 E是实 *Hilbert*空间,其内积和范数分别记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$和 $\|\cdot\|$,表示 E的所有非空子集构成的集合,设 $A_i:E\to E$, $B_i:E\times E\to E,(i=1,2)$都是单值算子。$M_i:E\to 2^E$ 是 A-单调算子 $(i=1,2)$我们考虑以下问题:

求 $x,y\in E$,使得

$$\begin{cases} y-A_1(x)-\beta B_1(y,y)\in \beta M_1 x \\ x-A_2(y)-\gamma B_2(x,x)\in \gamma M_2 y \end{cases} \quad (*)$$

这里$\beta>0,\gamma>0$是两个常数.

问题(*)称为关于A-单调算子的广义变分包含组。

首先给出一些基本概念。

定义1.1 算子$A:E\to E$称为是

(ⅰ)单调的,如果$\langle Ax-Ay,x-y\rangle\ge 0,\forall x,y\in E$;

(ⅱ)严格单调的,如果$\langle Ax-Ay,x-y\rangle\ge 0,\forall x,y\in E$,当且仅当$x=y$时,上式才取等号。

(ⅲ)S-强单调的,如果$\langle Ax-Ay,x-y\rangle\ge S\|x-y\|^2,\forall x,y\in E$,其中$\gamma>0$是常数。

注1 我们根据定义1.1容易证明强单调算子是严格单调算子。

定义1.2 算子$B:E\times E\to E$称为是

(ⅰ)关于第一变元S-强单调的,如果

$\langle B(x,\cdot)-B(y,\cdot),x-y\rangle\ge S\|x-y\|^2,\forall x,y\in E$,

其中$S>0$是常数。

(ⅱ)关于第一变元ξ-*Lipschitz*连续的,如果

$\langle B(x,\cdot)-B(y,\cdot),x-y\rangle\le \xi\|x-y\|,\forall x,y\in E$,

其中$\xi>0$是常数。

类似地,我们可以定义 $B(\cdot,\cdot)$关于第二变元的 *Lipschitz*连续。

定义1.3 若存在一个常数$m>0$,满足

$\langle Tx-Ty,x-y\rangle\ge -m\|x-y\|^2,\forall x,y\in E$,

则称 T是m-松弛单调的。

定义1.4 设$A:E\to E$是单值算子, M是 $E\to 2^E$的集值映象。若存在一个常数$\rho>0$,满足

(1) M是m-松弛单调,

(2) $A+\rho M$是极大单调的,

则称M是A-极大单调的,简称为A-单调。

定义1.5 A是$E\to E$的r-强单调算子,M是 $E\to 2^E$的A-极大单调,则预解算子定义为

$J_{\rho,A}^M=(A+\rho M)^{-1}(x),\forall x\in E$。

注2 A当是单调算子时,预解算子 J 是单值映射。

例 A是$E\to E$的单调算子, M是$E\to 2^E$的A-极大单调,则预解算子 $J_{\rho,A}^M:E\to E$是ρm-松弛单调算子,其中$\rho,m>0$。

证明 对$\forall u,v\in E$,由预解算子的定义,有

$$J_{\rho,A}^M=(A+\rho M)^{-1}(u),$$

$$J_{\rho,A}^M=(A+\rho M)^{-1}(v)。$$

则 $\frac{1}{\rho}\left[u-A(J_{\rho,A}^M(u))\right]\in M(J_{\rho,A}^M(u))$,

$\frac{1}{\rho}\left[v-A(J_{\rho,A}^M(v))\right]\in M(J_{\rho,A}^M(v))$。

由 M是A-极大单调,则 M是m-松弛单调,故有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\left\langle\left[u-A(J_{\rho,A}^M(u))\right]-\left[v-A(J_{\rho,A}^M(v))\right],J_{\rho,A}^M(u)-J_{\rho,A}^M(v)\right\rangle\\&=\frac{1}{\rho}\left\langle u-v-\left[A(J_{\rho,A}^M(u))-A(J_{\rho,A}^M(v))\right],J_{\rho,A}^M(u)-J_{\rho,A}^M(v)\right\rangle\\&\ge(-m)\left\|J_{\rho,A}^M(u)-J_{\rho,A}^M(v)\right\|^2.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left\langle u-v,J_{\rho,A}^M(u)-J_{\rho,A}^M(v)\right\rangle\\&\ge\left\langle A(J_{\rho,A}^M(u))-A(J_{\rho,A}^M(v)),J_{\rho,A}^M(u)-J_{\rho,A}^M(v)\right\rangle\\&-\rho m\left\|J_{\rho,A}^M(u)-J_{\rho,A}^M(v)\right\|^2\\&\ge-\rho m\left\|J_{\rho,A}^M(u)-J_{\rho,A}^M(v)\right\|^2\end{aligned}$$

。证毕。

引理1[2] A是 $E\to E$的r-强单调算子,M是 $E\to 2^E$的A-极大单调,则预解算子 $J_{\rho,A}^M:E\to E$是 $\frac{1}{r-\rho m}$-*Lipschitz*连续的,且 $0<\rho<r/m$。

2 主要结果

引理 设$\beta>0,\gamma>0$是两个常数。则下列三个

收稿日期:2013-12-15
作者简介:阿力非日(1986-),男,理学硕士,助教, 研究方向:非线性分析。

命题等价:

(1)广义变分包含组(*)有解$(x,y)\in E\times E$;

(2)存在$(x,y)\in E\times E$,满足$x=J^{M_1}_{\beta,A_1}[y-\beta B_1(y,y)]$,
$y=J^{M_2}_{\gamma,A_2}[x-\gamma B_2(x,x)]$。

(3)定义算子$T:E\to E$为$T(u)=J^{M_1}_{\beta,A_1}[v-\beta B_1(v,v)]$,
$v=J^{M_2}_{\gamma,A_2}[u-\gamma B_2(u,u)]$,任意$u\in E$,算子$T$在$E$中有不动点。

证明①⇔②。由广义变分包含组(*)有解$(x,y)\in E\times E$,则有

$$y-A_1(x)-\beta B_1(y,y)\in\beta M_1x,$$
$$x-A_2(y)-\gamma B_2(x,x)\in\gamma M_2y。$$

又由预解算子$J^{M}_{\rho,A}$的定义,有

$$x=J^{M_1}_{\beta,A_1}[y-\beta B_1(y,y)],\ y=J^{M_2}_{\gamma,A_2}[x-\gamma B_2(x,x)]。$$

②⇔③。若(3)成立.即T在E中有不动点$x\in E$。令$y=J^{M_2}_{\gamma,A_2}[x-\gamma B_2(x,x)]$,则$x=T(x)=J^{M_1}_{\beta,A_1}[y-\beta B_1(y,y)]$,即(2)成立.反之,若(2)成立,容易证明(3)也成立。

定理2.1 设$A_i:E\to E$是r_i-强单调算子$(i=1,2)$。$B_i:E\times E\to E$关于第一变元ξ_i-$Lipschitz$连续且s_i-强单调。而且$B_i:E\times E\to E$关于第二变元k_i-$Lipschitz$连续,$M_i:E\to 2^E$是A_i-单调算子$(i=1,2)$。如果存在常数$\beta>0,\ \gamma>0$使得

$$1+\beta^2\xi_1^2>2\beta s_1,\ 1+\gamma^2\xi_2^2>2\gamma s_2;$$

$$\frac{1}{r_1-\beta m_1}\left(\sqrt{1-2\beta s_1+\beta^2\xi_1^2}+\beta k_1\right)\cdot\frac{1}{r_2-\gamma m_2}\left(\sqrt{1-2\gamma s_2+\gamma^2\xi_2^2}+\gamma k_2\right)<1 \quad (2)$$

成立,则问题(*)存在唯一解。

证明 由引理知,要证明问题(*)有唯一解,只需证算子T在E中有唯一不动点。

事实上,我们任取$u_1,u_2\in E$,令$v_i=J^{M_2}_{\gamma,A_2}[u_i-\gamma B_2(u_i,u_i)](i=1,2)$。

由引理1可得

$$\|T(u_1)-T(u_2)\|=\left\|J^{M_1}_{\beta,A_1}[v_1-\beta B_1(v_1,v_1)]-J^{M_1}_{\beta,A_1}[v_2-\beta B_1(v_2,v_2)]\right\|$$
$$\le\frac{1}{r_1-\beta m_1}\left\|v_1-v_2-\beta[B_1(v_1,v_1)-B_1(v_2,v_2)]\right\|$$
$$=\frac{1}{r_1-\beta m_1}\left\|v_1-v_2-\beta[B_1(v_1,v_1)-B_1(v_2,v_1)+B_1(v_2,v_1)-B_1(v_2,v_2)]\right\|$$
$$\le\frac{1}{r_1-\beta m_1}\left\|v_1-v_2-\beta[B_1(v_1,v_1)-B_1(v_2,v_1)]\right\|$$
$$+\frac{\beta}{r_1-\beta m_1}\left\|B_1(v_2,v_1)-B_1(v_2,v_2)\right\| \quad (3)$$

由B_1的强单调性及$Lipschitz$连续性,有

$$\|v_1-v_2-\beta[B_1(v_1,v_1)-B_1(v_2,v_1)]\|^2$$
$$=\langle v_1-v_2-\beta[B_1(v_1,v_1)-B_1(v_2,v_1)],v_1-v_2-\beta[B_1(v_1,v_1)-B_1(v_2,v_1)]\rangle$$
$$=\|v_1-v_2\|^2-2\beta\langle v_1-v_2,B_1(v_1,v_1)-B_1(v_2,v_1)\rangle+\beta^2\|B_1(v_1,v_1)-B_1(v_2,v_1)\|^2$$
$$\le\|v_1-v_2\|^2-2\beta s_1\|v_1-v_2\|^2+\beta^2\xi_1^2\|v_1-v_2\|^2$$
$$\le(1-2\beta s_1+\beta^2\xi_1^2)\|v_1-v_2\|^2 \quad (4)$$

又$\|B_1(v_2,v_1)-B_1(v_2,v_2)\|\le k_1\|v_1-v_2\|$。(5)

由(3)(4)(5)得

$$\|T(u_1)-T(u_2)\|\le\frac{1}{r_1-\beta m_1}\left(\sqrt{1-2\beta s_1+\beta^2\xi_1^2}+\beta k_1\right)\|v_1-v_2\|。 \quad (6)$$

又$v_i=J^{M_2}_{\gamma,A_2}[u_i-\gamma B_2(u_i,u_i)](i=1,2)$,故有

$$\|v_1-v_2\|=\left\|J^{M_2}_{\gamma,A_2}[u_1-\gamma B_2(u_1,u_1)]-J^{M_2}_{\gamma,A_2}[u_2-\gamma B_2(u_2,u_2)]\right\|$$
$$\le\frac{1}{r_2-\gamma m_2}\left\|u_1-u_2-\gamma(B_2(u_1,u_1)-B_2(u_2,u_2))\right\|$$
$$\le\frac{1}{r_2-\gamma m_2}\left(\sqrt{1-2\gamma s_2-\gamma^2\xi_2^2}+\gamma k_2\right)\|u_1-u_2\|。 \quad (7)$$

由(6)(7)得

$$\|T(u_1)-T(u_2)\|\le\alpha\|u_1-u_2\|。$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{r_1-\beta m_1}\left(\sqrt{1-2\beta s_1+\beta^2\xi_1^2}+\beta k_1\right)\cdot\frac{1}{r_2-\gamma m_2}\left(\sqrt{1-2\gamma s_2-\gamma^2\xi_2^2}+\gamma k_2\right)。$$

根据假设条件知$0<\alpha<1$,这表明T是一个压缩映像,于是存在唯一解$(u,v)\in E\times E$。满足问题(*)。

3 迭代算法及收敛性

引理3.1[3] 设$\{c_n\}$,$\{k_n\}$为两个非负实序列,满足:

(1)$0\le k_n<1$,$n=0,1,2,\cdots$且$\limsup\limits_{n\to\infty}k_n<1$。

(2)$c_{n+1}\le k_nc_n$,$n=0,1,2,\cdots$。

则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$。

算法3.2 对$\forall u_0\in E$,Mann迭代序列$\{u_n\}\subset E$定义为

$$u_{n+1}=\alpha_nu_n+(1-\alpha_n)J^{M_1}_{\beta,A_1}(v_n-\beta B_1(v_n,v_n)),$$
$$v_{n+1}=\beta_nv_n+(1-\beta_n)J^{M_2}_{\gamma,A_2}(u_n-\gamma B_2(u_n,u_n))。$$

其中$n=0,1,2,\cdots$,且$\alpha_n,\beta_n\in[0,1)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n<1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n<1$。

定理3.3 设定理2.1的条件全部成立,定义范数$\|(u,v)\|=\|u\|_1+\|v\|\ \ \forall(u,v)\in E\times E$,如果常数满足

$$\frac{1}{r_2-\gamma m_2}\left(\sqrt{1-2\gamma s_2-\gamma^2\xi_2^2}+\gamma k_2\right)<\frac{1-\alpha_n}{1-\beta_n},$$

$$\frac{1}{r_1-\beta m_1}\left(\sqrt{1-2\beta s_1+\beta^2\xi_1^2}+\beta k_1\right)<\frac{1-\beta_n}{1-\alpha_n}。$$

则算法3.2定义的序列$\{(u_n,v_n)\}$强收敛于问题(*)的唯一(u,v)。

证明 问题(*)有唯一解(u,v),则

$$u=\alpha_nu+(1-\alpha_n)J^{M_1}_{\beta,A_1}(v-\beta B_1(v,v)),n=0,1,2,\cdots$$

结合算法3.2得

$$\|u_{n+1}-u\|=\left\|\alpha_n(u_n-u)+(1-\alpha_n)\left[J^{M}_{\beta,A}(v_n-\beta B_1(v_n,v_n))-J^{M}_{\beta,A}(v-\beta B_1(v,v))\right]\right\|$$
$$\le\alpha_n\|u_n-u\|+(1-\alpha_n)\frac{1}{r_1-\beta m_1}\left\|v_n-v-\beta(B_1(v_n,v_n)-B_1(v,v))\right\|$$

$$\le \alpha_n\|u_n-u\|+(1-\alpha_n)\frac{1}{r_1-\beta m_1}(\sqrt{1-2\beta s_1+\beta^2\xi_1^2}+\beta k_1)\|v_n-v\| 。$$

又

$$\|v_{n+1}-v\|=\left\|\beta_n(v_n-v)+(1-\beta_n)\left[J_{\gamma,A_2}^{M_2}(u_n-\gamma B_1(u_n,u_n))-J_{\gamma,A_2}^{M_2}(u-\gamma B_1(u,u))\right]\right\|$$

$$\le\beta_n\|v_n-v\|+(1-\beta_n)\left\|J_{\gamma,A_2}^{M_2}(u_n-\gamma B_1(u_n,u_n))-J_{\gamma,A_2}^{M_2}(u-\gamma B_1(u,u))\right\|$$

$$\le \beta_n\|v_n-v\|+(1-\beta_n)\frac{1}{r_2-\gamma m_2}(\sqrt{1-2\gamma s_2-\gamma^2\xi_2^2}+\gamma k_2)\|u_n-u\| 。\quad(9)$$

由题设我们所定义 $E\times E$ 上的范数

$\|(u,v)\|=\|u\|+\|v\|,(u,v)\in E\times E$，

则容易证明 $(E\times E,\|(u,v)\|)$ 是 Banach 空间。

故

$\|(u_{n+1},v_{n+1})-(u,v)\|=\|(u_{n+1}-u,v_{n+1}-v)\|=\|u_{n+1}-u\|+\|v_{n+1}-v\|$。

又

$$\|u_{n+1}-u\|+\|v_{n+1}-v\|$$

$$\le \alpha_n\|u_n-u\|+(1-\alpha_n)\frac{1}{r_1-\beta m_1}(\sqrt{1-2\beta s_1+\beta^2\xi_1^2}+\beta k_1)\|v_n-v\|$$

$$+\beta_n\|v_n-v\|+(1-\beta_n)\frac{1}{r_2-\gamma m_2}(\sqrt{1-2\gamma s_2-\gamma^2\xi_2^2}+\gamma k_2)\|u_n-u\|$$

$$=\left[\alpha_n+(1-\beta_n)\frac{1}{r_2-\gamma m_2}(\sqrt{1-2\gamma s_2-\gamma^2\xi_2^2}+\gamma k_2)\right]\|u_n-u\|$$

$$+\left[\beta_n+(1-\alpha_n)\frac{1}{r_1-\beta m_1}(\sqrt{1-2\beta s_1+\beta^2\xi_1^2}+\beta k_1)\right]\|v_n-v\|$$

$$\le k_n\|(u_n,v_n)-(u,v)\|\ \|u_{n+1}-u\|+\|v_{n+1}-v\|$$

其中 $k_n=\max\left\{\alpha_n+(1-\beta_n)\frac{1}{r_2-\gamma m_2}(\sqrt{1-2\gamma s_2-\gamma^2\xi_2^2}+\gamma k_2),\ \beta_n+(1-\alpha_n)\frac{1}{r_1-\beta m_1}(\sqrt{1-2\beta s_1+\beta^2\xi_1^2}+\beta k_1)\right\}$

根据条件我们有 $0<k_n<1$，令

$c_n=\|(u_n,v_n)-(u,v)\|$。

则由引理3.1知 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$。

因此由算法3.2生成的 $\{(u_n,v_n)\}$ 迭代序列强收敛于 $(u,v)\in E\times E$。

注释及参考文献：

[1]R.U.Verma, A-monotonicity and applications to nonlinear inclusion problems[J],Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 17(2)(2004) 193-195.

[2]R.U.Verma, Nonlinear variational and constrained hemivariational inequalities involving relaxed operators[J], Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik 77(5)(1997) 387-391.

[3] Fang Y P, Huang N J. H-Monotone operator and resolvent technique for variational inclusions[J].ApplMath Comput,2003, 145:795-803.

[4]R.U.Verma, A-monotonicity and its role in nonlinear variational inclusions[J], J.Optim. Theory Appl.129(3)2006(in press).

[5]Noor M.A. Sensitivity Analysis Framework for General Quasi-variational Inclusions[J].Computers Math Applic,2002,44: 1175-1181.

[6]Ding X P,LU C L. Perturbed Proximal Point Algorithms for General Quasi-variational-like inclusions[J].J.Comput and ApplMath,2000,113:153-165.

[7] Han Z, Fang Y P. Extended Variational Inclusions with H-monotone Operators Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)[J].Apr.2004,41(2):279-283 .

[8]张石生.变分不等式及其相关问题[M].重庆出版社,2008.6.

A Class of Monotone Operator Generalized Variational Inclusions

ALI Fei-ri

（School of Yi Language and Culture，Xichang College, Xichang, Sichuan 615022）

Abstract: In this paper, in Hilbert space, we introduce and study a new class of A- monotone operator generalized variational inclusions problems. Using the fixed point theorem，proves the existence and uniqueness of the solution for this class of generalized variational inclusions. And the research for this kind of variational iterative algorithm approximate solutions contains solution operator by using the technique of A- monotone mappings, and convergence of the iterative sequences generated by the algorithm.

Key words: A- monotone operators; group of variational inclusions; resolvent operator; the existence of solutions; the iterative algorithm