球的体积公式的推导方法*

周　明
（亳州师范高等专科学校,安徽 亳州 236800）

【摘　要】球的体积公式在球的表面积、圆心、球的质量计算等方面都有很大的作用,为此,利用祖暅原理、数列极限、旋转体的体积公式、平面极坐标变换、柱面坐标变换、球面坐标变换等六种方法对球的体积公式进行推导。

【关键词】球;体积;公式;方法
【中图分类号】O182 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)02-0026-02

以坐标原点 $O(0,0,0)$ 为球心,半径为 R 的球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2=R^2$,其体积公式为

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

而球的体积公式 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$ 在球的表面积、圆心、球的质量计算等方面都有很大的作用,但对球的体积公式推导方法常不被人们重视,为此,本文主要利用祖暅原理、数列极限、旋转体的体积公式、平面极坐标变换、柱面坐标变换、球面坐标变换六种方法对球的体积公式进行推导。

1 祖暅原理法

祖暅原理:夹在两个平行平面间的两个几何体,被平行于这两个平行平面的任意平面所截,如果截得两个截面的面积总相等,那么这两个几何体的体积相等[1]。

将底面半径和高都是 R 的圆柱体 $\Omega_1: x^2+y^2=R^2 (0\le z\le R)$,挖去一个底面半径和高都是 R 的圆锥体 $\Omega_2: x^2+y^2-z^2=0 (0\le z\le R)$ 所得到的几何体与球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2=R^2$ 的上半球放在坐标平面 xOy 上,用平面 $z=h (0\le h\le R)$ 去截,可得

$$S_{圆}=S_{圆环}=\pi\left(R^2-h^2\right).$$

所以

$$\begin{aligned}V_{半球}&=V_{圆柱}-V_{圆锥}\\&=\pi R^2\bullet R-\frac{1}{3}\pi R^2\bullet R\\&=\frac{2}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned}V_{球}&=2V_{半球}\\&=\frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

2 数列极限法

将球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2=R^2$ 的上半球进行 n 等分,即用平行于坐标平面 xOy 的等距平行平面,把半球切割成 n 层,每一层都是近似于小圆柱体,这 n 个小圆柱体的体积之和就是半球的体积。

设 r_i 为第 i 个小圆柱体的底面半径(从下向上数),因为每个小圆柱体的高都是 $\frac{R}{n}$.

所以有 $r_i=\sqrt{R^2-\left[\frac{R}{n}(i-1)\right]^2} \quad (i=1,2,\cdots,n).$

所以

$$\begin{aligned}V_i&=\pi r_i^2\cdot\frac{R}{n}\\&=\frac{\pi R^3}{n}\left[1-\frac{(i-1)^2}{n^2}\right].\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}V_1+V_2+\cdots+V_n&=\frac{\pi R^3}{n}\left\{1+\left[1-\frac{1^2}{n^2}\right]+\left[1-\frac{2^2}{n^2}\right]+\cdots+\left[1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]\right\}\\&=\frac{\pi R^3}{n}\left\{n-\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^2}\right\}\\&=\pi R^3-\frac{\pi R^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}V_{半球}&=\lim_{n\to\infty}(V_1+V_2+\cdots+V_n)\\&=\pi R^3-\frac{\pi R^3}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{2}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

即

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

3 旋转体的体积公式法

定理 由连续曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a, x=b$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积公式[2]

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

球体 $\Omega: x^2+y^2+z^2=R^2$ 的右半球可以看作是由曲线 $y=\sqrt{R^2-x^2} \quad (0\le x\le R)$,直线 $x=0, x=R$ 所围成的扇形绕轴旋转而成的。

所以由旋转体的体积公式可知,球的体积为

收稿日期:2014-03-09
*基金项目:安徽省自然科学研究项目(项目编号:KJ2013Z258);安徽省教学研究项目(项目编号:P2012jyxm595);数学教育省级特色专业(项目编号:20101184)专项资金资助;亳州师专科研项目(项目编号:BSKY201111, BSKY201113, BSKY201211)专项资金资助。
作者简介:周明(1965-),男,安徽蒙城人,副教授,硕士,主要从事几何学研究。

$$V_{球}=2V_{半球}=2\pi\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx$$
$$=2\pi\left(\int_0^R R^2dx-\int_0^R x^2dx\right)$$
$$=2\pi\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)$$
$$=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

4 平面极坐标变换法[3]

球体$\Omega:x^2+y^2+z^2=R^2$的上半球的方程是

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

而球体$\Omega:x^2+y^2+z^2=R^2$ 在坐标平面 xOy 上的投影区域为

$D_{xy}:x^2+y^2\le R^2$.

所以球的体积为

$$V_{球}=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy.$$

作平面极坐标变换

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}$$

则区域 $D_{xy}:x^2+y^2\le R^2$,应变为区域 $D_{\rho\varphi}:0\le\rho\le R,0\le\varphi\le 2\pi$.

又因为 $dxdy=\rho d\rho d\varphi$,所以球的体积

$$V_{球}=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$
$$=2\iint_{D_{\rho\varphi}}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho d\varphi=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$$
$$=-2\pi\int_0^R\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(R^2-\rho^2\right)$$
$$=-\frac{4}{3}\pi\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

5 柱面坐标变换法

作柱面坐标变换[4]87

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=u\end{cases}\quad\left(\begin{array}{c}\rho\ge 0\\ -\pi\prec\varphi\le\pi\\ -\infty\prec u\prec+\infty\end{array}\right).$$

则球体$\Omega:x^2+y^2+z^2=R^2$在柱面坐标系下的方程是 $\rho^2+u^2=R^2$,

因为其上半球$\Omega_{上}$在z轴上的投影区域为$0\le z\le R$,所以上半球$\Omega_{上}$在柱面坐标系下的区域为

$0\le\rho\le\sqrt{R^2-u^2},-\pi\le\varphi\le\pi,0\le u\le R$

又因为 $dxdydz=\rho d\rho d\varphi du$,所以球的体积是

$$V_{球}=2V_{半球}=2\iiint_{\Omega_{上}}dxdydz$$
$$=2\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^R du\int_0^{\sqrt{R^2-u^2}}\rho d\rho$$
$$=2\pi\int_0^R\left(R^2-u^2\right)du=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

6 球面坐标变换法

作球面坐标变换[4]

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\cos\varphi\\ y=\rho\cos\theta\sin\varphi\\ z=\rho\sin\theta\end{cases}\quad\left(\begin{array}{c}\rho\ge 0\\ -\pi\prec\varphi\le\pi\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right).$$

则球体 $\Omega:x^2+y^2+z^2=R^2$在球面坐标系下的方程是 $\rho^2=R^2$,

所以球Ω在球面坐标系下的区域为

$$0\le\rho\le R,-\pi\le\varphi\le\pi,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

又因为 $dxdydz=\rho^2\cos\theta d\rho d\varphi d\theta$,所以球的体积是

$$V_{球}=\iiint_{\Omega}dxdydz$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^R\rho^2d\rho\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$
$$=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

总之,本文主要介绍了六种球的体积的推导方法,以便起到抛砖引玉之作用,寻找更多的推导方法。

注释及参考文献:

[1]商世平.试论刘徽对“祖暅原理”的认识[J].河北师范大学学报:(自然科学版),1987(2):204-208.

[2]张圣勤.史历.高等数学[M].上海:复旦大学出版社,2006:216-217.

[3]纪永强.空间解析几何[M].北京:高等教育出版社,2013:275.

[4]吕林根.许子道.解析几何[M]. 北京:高等教育出版社,2006.

Derivation Method of Ball Volume Formula

ZHOU Ming

(Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800)

Abstract: The ball volume formula has great effect in such aspects of the ball surface area, the center of the circle, the quality of the ball . Therefore, the Zu Geng principle, sequence limit, the volume of a body of revolution, cylindrical coordinate transformation formula, plane coordinates transformation, method of spherical coordinate transformation and so on can be used for the volume formula derivation of the ball.

Key words: ball; volume;formula; method