利用微分学理论证明不等式的常用方法*

景慧丽,屈　娜,刘　华,赵伟舟
(第二炮兵工程大学 理学院,陕西 西安 710025)

【摘　要】不等式的证明是《高等数学》课程的重要内容之一.为了帮助学员更熟练地掌握利用微分学理论证明不等式的方法,本文就利用微分学理论证明不等式的常用方法进行总结,提出可以利用函数的单调性、利用拉格朗日中值定理和利用泰勒公式三种方法来证明不等式.

【关键词】不等式;证明;方法
【中图分类号】O178 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)02-0016-03

不等式是变量之间很重要的一种联系,不等式的证明是《高等数学》课程和《数学分析》课程的重要组成部分。但是众多《高等数学》教材和《数学分析》教材关于不等式的证明都没有设立专门的章节,这些内容只是作为某些章节相关定理的应用而分散地出现在教材。另外不等式的证明没有固定模式,证明方法因题而异,灵活多变,再加上学员只是初步具有微分学知识,因此学员往往对不等式的证明感到束手无策、无从下手。笔者根据自己多年的教学经验,对利用微分学理论证明不等式的方法进行了总结。

利用微分学理论证明不等式,常用的方法有:利用函数的单调性、利用拉格朗日(Lagrange)中值定理和利用泰勒(Taylor)公式。

1 利用函数的单调性

在微分学中是用导函数在一区间内的符号来判断函数在该区间上的单调性的,即[1]:设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导。

(1) 若在(a,b)内$f'(x)>0$,则函数$f(x)$在$[a,b]$上单调增加;

(2) 若在(a,b)内$f'(x)<0$,则函数$f(x)$在$[a,b]$上单调减少。

利用函数的单调性证明不等式的一般步骤是[2]:

Step1 移项,使不等式一端为0,一端为x的函数$F(x)$;

Step2 求出$F'(x)$,并判断$F'(x)$在所证区间上的符号,从而确定函数$f(x)$的单调性;

Step3 求出$F(x)$在所证区间端点的函数值,根据函数的单调性即得结论。

例1 证明当$x>0$时,$x>\ln(1+x)$。

分析 令$F(x)=x-\ln(1+x)$,

则 $F'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$

当$x>0$时,$F'(x)>0$,所以$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加。

因此当$x>0$时,$F(x)>F(0)=0$,即$x>\ln(1+x)$。

注1 一般地,要证形如$f(x)>g(x)$的不等式,首先考虑利用函数的单调性来证。

注2 要利用函数的单调性证明不等式必须构造辅助函数$F(x)$,并判断函数$F(x)$的单调性。通常情况下通过移项就可以构造辅助函数,例如要证形如$f(x)>g(x)$的不等式,可以构造$F(x)=f(x)-g(x)$,但有时对不等式简单变形后构造的辅助函数更简单。

例2 证明当$0<x<1$时,$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$。

分析 如果取$F(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$则求导比较麻烦,且不易判断$F'(x)$的符号。但是如果把不等式先变形为$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$,再进一步变形为

$\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}<(1+x)\ln(1+x)$

则可以取$F(x)=\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-(1+x)\ln(1+x)$,不但求导容易,且$F(x)$的单调性很容易判断。

注3 有时需要求出$F'(x)$,$F'''(x)$等,才能确定$F(x)$的单调性[3]。

例3[3] 证明当$x>0$时,$\sin x+\cos x>1+x-x^2$。

分析 令$F(x)=\sin x+\cos x-1-x+x^2$,则$F'(x)=\cos x-\sin x-1+2x$,当$x>0$时,无法判断$F'(x)$的符号,需求出$F''(x)=-\sin x-\cos x+2$。由于$F''(x)>0$,所以当$x\geq 0$时$F'(x)$单调增加,故$F'(x)>F'(0)=0$,因此$F(x)$单调增加。

2 利用拉格朗日(Lagrange)中值定理

拉格朗日(Lagrange)中值定理[1]是:如果函数$f(x)$满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

收稿日期:2014-01-13
*基金项目:第二炮兵工程大学青年基金资助项目(项目编号:2013QNJJ008)。
作者简介:景慧丽(1983-),女,河南平顶山人,讲师,硕士研究生,主要从事高等数学教学与研究工作。

(2) 在开区间(a,b)内可导，那么至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

利用拉格朗日(Lagrange)中值定理证明不等式的一般步骤是[2]：

Step1 找出区间$[a,b]$，并构造辅助函数$F(x)$；

Step2 对函数$F(x)$在区间$[a,b]$上应用拉格朗日(Lagrange)中值定理，并写出中值公式

$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$；

Step3 对$F'(\xi)$进行适当放缩，从而证出所证不等式。

例4[1] 设$a>b>0$，证明：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$。

分析 令 $F(x)=\ln x$，$x\in[b,a]$

则函数$F(x)$在$[b,a]$上满足拉格朗日中值定理的条件，利用拉格朗日中值定理得：至少存在一点$\xi\in(b,a)$，使$F(a)-F(b)=F'(\xi)(a-b)$，即$\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b)$。

因为$\xi\in(b,a)$，所以$\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，故$\frac{a-b}{a}<\frac{1}{\xi}(a-b)<\frac{a-b}{b}$，不等式得证。

注4 一般地，要证形如$f(x)<g(x)<h(x)$的不等式，常用拉格朗日中值定理。另外要证的不等式中含有$f(b)-f(a)$或$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$形式的因子（或适当变形后出现这两种形式的因子）时，常考虑拉格朗日中值定理。

例5[4] 设$0<a<b$，证明：

$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)<(1+a+b)\ln(1+a+b)$。

分析 本不等式从表面看是不含有$f(b)-f(a)$形式的因子，但是如果把其变形为：

$(1+a+b)\ln(1+a+b)-(1+b)\ln(1+b)>(1+a)\ln(1+a)$

则左端可以看成$F(x)=(1+x)\ln(1+x)$在区间$[b,a+b]$上的端点值之差，因此可以对$F(x)$在区间$[b,a+b]$上利用拉格朗日中值定理来证明。

注5 构造恰当的辅助函数$F(x)$是利用拉格朗日中值定理证明不等式的关键。如果是形如$f(x)<g(x)<h(x)$的不等式，那么辅助函数$F(x)$通常选为$g(x)$；如果不等式中含有$f(b)-f(a)$形式的因子，那么辅助函数$F(x)$通常可以直接选为$f(x)$。

例6[1] 证明当$x>0$时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

分析 令$F(t)=\ln(1+t)$，$t>0$，对$F(t)$在$[0,x]$上利用拉格朗日中值定理即可。

3 利用泰勒(Taylor)公式

泰勒(Taylor)中值定理[1]是：如果$f(x)$在含x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶的导数，则对任意一$x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)$是余项。

利用泰勒(Taylor)公式证明不等式的一般步骤是：

Step1 写出$f(x)$在某一点x_0处的带有拉格朗日型余项的泰勒公式；

Step2 代入已知的条件；

Step3 对等式适当放缩即可得出所证的不等式。

例7[5] 已知$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，且$f''(x)\ge0$，求证$f(x)\ge x$。

分析 因为$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，所以$\lim_{x\to0}f(x)=0$，又$f''(x)$存在，所以$f(x)$及$f'(x)$连续，因此$f(0)=0$，且$f'(0)=1$。则

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

其中ξ介于0与x之间.

因为$f''(x)\ge0$，所以$\frac{f''(\xi)}{2}x^2\ge0$，因此$f(x)\ge x$。

注6 一般地，含有二阶及二阶以上的导数的不等式，常用带有拉格朗日余项的泰勒公式来证明。另外，要恰当选择在哪个点x_0处将函数$f(x)$展开为泰勒公式，这没有一般规律可循，但通常选用区间的端点、中间点、函数的极值点和导数为零的点等特殊点作为x_0[6]。

注7 有时把函数进行泰勒展开后，还要代入某些点的值如区间端点等进行计算，然后再利用已知条件适当放缩。

例8 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=a$，$f(\frac{1}{2})<a$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)>0$。

分析 对函数$f(x)$在点$x=\frac{1}{2}$进行泰勒展开：

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{1}{2})^2$$

其中ξ介于x与$\frac{1}{2}$之间.把 和 代入上式

$$f(0)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-\frac{1}{2})^2 \qquad (0<\xi_1<\frac{1}{2})$$

$$f(1)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-\frac{1}{2})^2 \qquad (\frac{1}{2}<\xi_2<1)$$

上述两式相加得：$f(0)+f(1)=2f(\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{8}$

所以 $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=8[2a-2f(\frac{1}{2})]>0$

因此 $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)>0$

取 $f''(\xi)=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$，显然$\xi\in(0,1)$，且满足$f''(\xi)>0$。

注8 当然例7也可以用拉格朗日中值定理来证明，这里不再赘述。

注9 有些不等式只用一种方法是证明不出来的，需要两种方法相结合才能证明。

例9[5] 设 $0<a<b$，证明不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$。

分析 本不等式中尽管含有 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 形式的因子，但是只用拉格朗日中值定理是无法证明的。

对 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$，可以构造辅助函数 $F(x)=\ln x$，利用拉格朗日中值定理证明。

对 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$，需要构造辅助函数 $\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}$，利用单调性来证明。

4 结语

在《高等数学》课程中利用微分学理论证明不等式除了上述常用的三种方法外，还可以利用函数的极值和最值、曲线的凹凸性等来证明。尽管方法不同，但知识点之间其实是有一定的联系，例如拉格朗日中值定理是泰勒中值定理的特殊情形，而函数的单调性其实是拉格朗日中值定理的应用，所以，有的不等式可以用多种方法来证明。总之，不等式的证明是一个重点也是一个难点问题，学员一定要灵活运用上述三种证明方法，注意不同方法的适用范围。对一道题目学员不能仅限于一种解题方法，应该从不同的角度给出不同的解法，这样才有利于突破思维的局限性，培养综合能力。

注释及参考文献：

[1]同济大学应用数学系.高等数学(上)[M].第六版.北京：高等教育出版社,2007：12-146.

[2]陈文灯，黄先开，曹显兵，等.高等数学复习指导[M].北京：清华大学出版社,2009：530.

[3]杨黎霞.微分学中不等式的证明[J].高等数学研究,2011,14(1)：56-59.

[4]张盈.微分法在证明不等式中的应用[J].高等函授学报(自然科学版),2011,24(3)：52-55.

[5]张天德，蒋晓芸.Б.П.吉米多维奇高等数学习题精选精解[M].第一版.济南：山东科学技术出版社,2010：104，117.

[6]吴忠祥.工科数学分析基础教学辅导书(上)[M].第一版.北京：高等教育出版社,2006：44.

Common Methods Using Differential Theory to Prove Inequality

JING Hui-li, QU Na, LIU Hua, ZHAO Wei-zhou

(School of Natural Science, The Second Artillery Engineering Institute, Xi'an , Shanxi 710025)

Abstract: The proof of inequality is one of the important contents of Higher Mathematics course. In order to help the students grasp the methods of the inequality's proof by using differential theory, the common methods using differential knowledge are researched in this paper. Furthermore, three approaches are discussed that include using monotonicity, Lagrange mean-value theorem and Taylor formula.

Key words: inequality; proof; method