第28卷第1期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.28,NO.1
2014年3月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Mar.,2014

关于数学基础的新的认识之无限与有限*

何姜林

(成都大学 城乡建设学院,四川 成都 610106)

【摘 要】用全新的思考将正实数分为有限部分和无限部分,给出了有限部分的边界和无限部分的一些性质,利用无限部分的无限小与无限大的性质判断正项级数的收敛性及重新定义了极限的定义;根据几个假设得到了无限部分的证明;把实数量化了,使得函数的运算变得更为灵活;给出了函数的另一种新的表达形式。

【关键词】有限;无限;极限;函数的无限小表达形式。

【中图分类号】O172 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)01-0032-04

1 引言

大数学家G.Cantor曾说过"当我们在审视一种新的数学思想正确与否时,不应该用以前的思想来审视这种新思想,而应该通过这种数学思想产生的效益来对此加以审视,因为数学本身就是自由,新旧思想有时也会是矛盾统一的"。

本文首先将正实数划分为有限部分和无限部分,再根据正实数中每一位数的最大数是9和最小数是0得到了函数的定义域在有限部分的上界和下界,由此引出了几个假设,巧妙的得到了无穷大与无穷小的证明,并巧妙的运用无限部分的性质证明正项级数的收敛性和重新定义了极限,开创了正实数的有限部分和无限部分的研究以及无穷大与无穷小的新的研究思路,把实数的大小转化为量的比较,得出了新的积分思想;给出了函数的另一种新的表达形式。

2 实数中的无限与有限

在实数中每一位的最大数都为9,例如在由十位和个位组成的两位数中最大的数是99,在百位、十位、个位组成的三位数中最大的是999。

假设2.1 在正实数中存在两个部分:有限部分和无限部分,其中无限部分又分为无限小部分和无限大部分。

有限部分:能用有限位数表示的正实数的集合,用C表示。例如89是由个位和十位两位数构成的有限数。

设所有函数的定义域在有限部分的上界δ为999999…9.9…9,其中9的个数是有限的,表示为$\delta=10^{\alpha}-0.1^{\rho}$,下界$\tau$为0.0000000……001,其中0的个数是有限的,表示为$\tau=0.1^{\omega}$,α、ρ、ω为有限部分使得δ在函数的定义域在有限部分取得上界和τ在函数的定义域在有限部分取得下界的整数。例如$50\delta+1$为$f(x)=50x+1$的自变量在有限部分取得上界的函数值。

假设2.2 $\alpha=\rho=\omega$,即$\delta=10^{\alpha}-0.1^{\alpha}$,$\tau=0.1^{\alpha}$,则$\frac{1}{\delta+\tau}=\tau$。

无限部分:

i无限小部分:不能用有限的位数表示的小于任意有限位数的数的集合,用A表示。

ii无限大部分:不能用有限的位数表示的大于任意有限位数的数的集合,用B表示。

假设(无限假设)2.3

2.3.1 设1属于无限部分,存在函数$\xi g(x)$、$\xi f(x)$并且他们中都不含无限小常数、无限大常数、δ和τ,如$60x+45\tau$和$60x+19l+\tau$都不是函数$\xi g(x)$或$\xi f(x)$;

i若存在$\xi g(l)<\xi f(\tau)\le\tau$,则$\xi g(l)\in A$;

ii若存在$\phi g(l)>\phi f(\delta)\ge\delta$,则$\phi g(l)\in B$。

2.3.2 无穷大的运算等价于无限大,无穷小的运算等价于无限小,即无穷大或无穷小的运算等价于无限部分的1的运算。

例如:证明$20l\in A$,$\sqrt{\zeta}\in B$,$\frac{2}{\zeta}\in A$,其中$l\in A$,$\zeta\in B$。

证明:

$$\because l\in A,\therefore l<0.001\tau,\therefore 20l<0.02\tau<\tau,\therefore 20l\in A.$$

$$\because \zeta\in B,\therefore \zeta>\delta^4,\therefore \sqrt{\zeta}>\delta^2>\delta,\therefore \sqrt{\zeta}\in B.$$

$$\because \zeta\in B,\therefore \zeta>2(\delta+\tau),\therefore \frac{2}{\zeta}<\frac{2}{2(\delta+\tau)}=\tau,\therefore \frac{2}{\zeta}\in A.$$

定理2.1 设ϕ和o为无限大中的整数且$o>\phi$,$o-\phi\in$ B,正项级数在第ϕ到o收敛则级数收敛,若发散则级数发散。

证明:(柯西判别法)设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数,

收稿日期:2013-08-15

*基金项目:成都大学创新性实验资助的项目(项目编号:CDUCX201301028)。

作者简介:何姜林(1992-),男,四川雅安人,本科,研究方向:数理逻辑。

且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p$（或$+\infty$）,则

（1）当 $p<1$ 时,级数收敛;

（2）当 $p>1$（包括 $p=+\infty$）,级数发散。

证明:当 时 $n\in B$, $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p$, $\therefore u_n=p^n$;

设 ϕ 和 o 为无限大中的整数且 $o>\phi, o-\phi\in$ B,则 u_n 的第 ϕ 到 o 的和为

$$\sum_{n=1}^{o}p^n-\sum_{n=1}^{\phi}p^n=\frac{1}{p-1}p^{\phi+1}(p^{o-\phi}-1)\text{ 。}$$

i 当 $p=0$ 时级数收敛;

ii 当 $0<p<1$ 时,因为 ϕ 和 o 为无限大中的整数,所以有

$$\left|p^{\phi+1}(p^{o+1}-1)\right|<1,$$

所以 $\frac{1}{p-1}p^{\phi+1}(p^{o-\phi}-1)$ 收敛,即级数收敛。

因为 ϕ 和 o 为无限大中的整数,所以有

$$p^{\phi+1}>p^{\log_p\delta}=\delta$$

易知 $\frac{1}{p-1}p^{\phi+1}(p^{o-\phi}-1)\in$ B,即级数收敛。

3 极限的定义与在无限小下的函数

对定义:设当 $|x|$ 大于某一正数时函数 $f(x)$ 有定义,令A:对任意的给定的正数 ε（不论它多么小）,总存在着正数X,使得对于满足不等式 $|x|>X$ 的一切 x,总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$;令B:A为函数 $f(x)$ 当 $x\longrightarrow\infty$ 时的极限。对 $A\Rightarrow B$ 是成立的,这就是传统的极限的定义。

讨论: $A\Rightarrow B$,如图1,

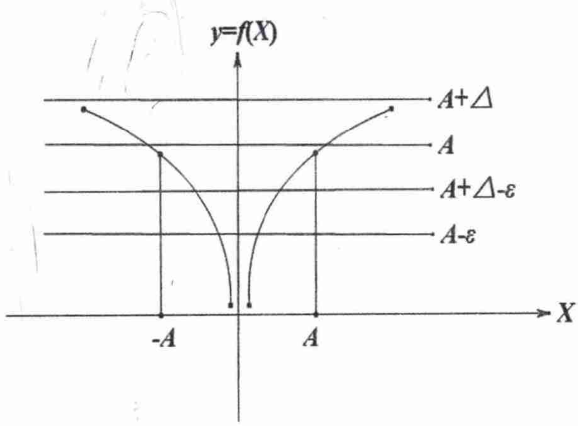

图1

设A为 $f(x)$ 的极限,Δ 为一个给定任意小正数,因为 ε 为任意给定的正数,所以对 $|x|>X$ 的一切 x 由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 有 $f(x)-(A-\varepsilon)>0$,即 $|x|>X$ 时 $(A-\varepsilon)$ 与 $f(x)$ 之间存在有一个数 $(A+\Delta-\varepsilon)$ 在 $f(x)$ 与 $(A-\varepsilon)$ 之间;而

$$(A+\Delta+\varepsilon)>f(x)$$

恒成立,所以当对任意给定的正数 ε（不论它多么小）,总存在着正数X使得对于满足不等式的 $|x|>X$ 一切 x 总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则必有 $|f(x)-(A+\Delta)|<\varepsilon$。若 $A\Rightarrow B$ 成立,则 $f(x)$ 在 $x\longrightarrow\infty$ 时的极限并不唯一,这与极限的惟一性相矛盾。

定义3.1 设 $|\psi|\in B, \partial\in A$, $|a|\in C$;当存在 $|f(\psi)-a|=\partial$ 时,则称 a 为函数 $f(x)$ 当 $x\longrightarrow\infty$ 时的极限。

例一:用定义证明 $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{2})^x=0$。

证明:令 $\left|(\frac{1}{2})^x-0\right|=\partial$, $x>0\Rightarrow x=\log_2\partial^{-1}$ 因为 $\partial\in A$,所以 $\partial<2^{-\delta}$ 即 $\frac{1}{\partial}>2^{\delta}$,所以 $\log_2\partial^{-1}>\log_2 2^{\delta}$ 即 $\log_2\partial^{-1}>\delta$,所以

$x=\log_2\partial^{-1}\in$ B,所以 $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{2})^x=0$。

例二:用定义证明 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x}=\frac{2}{3}$。

证明:令 $\left|\frac{2x+3}{3x}-\frac{2}{3}\right|=\partial \Rightarrow |x|=\frac{1}{\partial}$;因为

$\frac{1}{\partial}>\frac{1}{\tau}$ 又 $\frac{1}{\tau}=\delta+\tau$,所以 $\frac{1}{\partial}\in B$,所以 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x}=\frac{2}{3}$。

设有两篮子的鸡蛋且每个鸡蛋的质量都是一样的,现在要比较那一个篮子中装的鸡蛋更重一些;通过对两个篮子中鸡蛋的数量的统计,得知甲篮有100个鸡蛋、乙篮有108个鸡蛋,于是有结论乙篮的鸡蛋比甲篮更重。这种比较方法的精华是篮子里的每个鸡蛋质量相同,那么对篮子中鸡蛋的总重的比较就转化为对鸡蛋的数量的比较。

设在一根线段 v 上 n 有 个不同的点,分别标记为 n_0, n_1, n_2 ……n_{n-1},如图2所示,

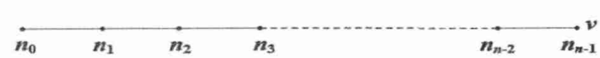

图2

已知每两个相邻点之间的距离都为 α,设每个点代表一个不同大小的数,即 $n_0<n_1<n_2\cdots\cdots<n_{n-1}$,那么在 v 上给出的每个点都可以用 $n_n=n\alpha+n_0$, $n\geq 0$,设 $n_0=0$,则 $n_n=n\alpha$,那么每个给出的点对应的数就是 $n_0=0$, $n_1=\alpha$, $n_2=2\alpha$ ……, $n_{n-1}=(n-1)\alpha$;那么当 α 越小在 v 上的点就会越多即代表的数就会越多,落在区间 $[(n-1)\alpha, n\alpha]$ 的数就会越来越少,计算的精度就会越来越高,假设 α 为无限的小那么可以把实数划分为以下两类:

i 第一类实数:能用已给出的数轴上的点表示的实数,即实数 $a=n\alpha$, $|\alpha|\in A$, n 为自然数。

ii 第二类实数:不能用已给出的数轴上的点表示的实数,即实数 $a\in((n-1)\alpha, n\alpha)$, $|\alpha|\in A$, n 为自然数。

为了区别第一类实数和第二类实数,不妨以0

作为左右起点，引入一个数1作为参考，令$1=n\alpha$；设有一个实数$a=c\alpha$，当$\frac{c}{n}$为有理数，则a属于第一类实数；当$\frac{c}{n}$为无理数，则a属于第二类实数。

因为α为无限的小，以至于小到在计算时可以近似的把区间$[(n-1)\alpha,n\alpha)$看成是由一个单元素组成的集合，该元素为$(n-1)\alpha$。

假设3.1 实数的值是从0开始由一个极小的量累积起来的，表示为$x=n\alpha$，x为正实数，$|\alpha|\in A$，n为非负整数；$\alpha>0$表示正实数部分，$\alpha<0$表示负实数部；那么对于函数$f(x)$当$x\geq 0$时就有$f(x)=f(n\alpha)$，称$f(n\alpha)$为函数的无限小的表达形式。

定理3.1 已知$f(x)$为$(0,u)$内的连续可导函数，则$f(x)=f(n\alpha)=\sum_{i=1}^{n}f'(i\alpha-\alpha)\alpha+f(0)$，$n\geq 1$。

证明：根据求导公式$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，有

$$f'(x)=f'(n\alpha)=\frac{f(n\alpha+\alpha)-f(n\alpha)}{\alpha}$$

得$f(n\alpha+\alpha)-f(n\alpha)=f'(n\alpha)\alpha$，

当$n=0, f(\alpha)-f(0)=f'(0)\alpha$,

当$n=1, f(2\alpha)-f(\alpha)=f'(\alpha)\alpha$,

当$n=2, f(3\alpha)-f(2\alpha)=f'(2\alpha)\alpha$,

……

当$n=n-1, f(n\alpha)-f(n\alpha-\alpha)=f'(n\alpha-\alpha)\alpha$；

将左右两边相加得$f(n\alpha)-f(0)=\sum_{i=1}^{n}f(i\alpha-\alpha)\alpha$，整理得

$$f(x)=f(n\alpha)=\sum_{i=1}^{n}f'(i\alpha-\alpha)\alpha+f(0),\ n\geq 1\ ;$$

上述过程对$\alpha>0$和$\alpha<0$都成立，定理得证。

设$g(x)$为$f(x)$的一个原函数，则有

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}f'(i\alpha-\alpha)\alpha+c\ ,$$

c为常数。

根据传统不定积分的定义有$\int f(x)dx=F(x)+C$，所以$\int f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}f(i\alpha-\alpha)\alpha+C'$，$C'$为任意常数。

推论3.1 设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则有$\int f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}f(i\alpha-\alpha)\alpha+C'=F(x)+C$，$C'$、$c$为任意常数。

例：求$f(x)=2x+3$的不定积分。

解：根据推论3.1有$\int f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}f(i\alpha-\alpha)\alpha+C'=\sum_{i=1}^{n}[2(n-1)\alpha+3]\alpha+C'$；对数列求和得$\int f(x)dx=(n\alpha)^2-(n\alpha)\alpha+3n\alpha+C'=x^2-x\alpha+3x+C'=x^2+3x+C'$。

在平面直角坐标系中有一曲线方程$f(x)$，$f(x)$在$[0,b]$内连续可导，求曲线$f(x)$在$[a,b]$的弧长，其中$a>0$。

解：不妨先求出曲线在$[0,b]$上的弧长。

设x轴上在$[0,b]$上有点0、x_1、x_2、……x_3，$x_n=b=n\alpha, x_0=0$；则$f(x)$在$[0,b]$上的弧长为

$$L_1=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2}\ ,$$

将$n\alpha$代入得

$$L_1=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha^2+[f(i\alpha)-f(i\alpha-\alpha)]^2}=\sum_{i=1}^{n}\alpha\sqrt{1+[f'(i\alpha)]^2}\ ;$$

设$a=m\alpha$，则$f(x)$在$[0,a]$的弧长为

$$L_2=\sum_{j=1}^{m}\alpha\sqrt{1+[f'(j\alpha)]^2}\ ,$$

所以$f(x)$在$[a,b]$的弧长S为

$$S=L_1-L_2=\sum_{i=1}^{n}\alpha\sqrt{1+[f'(i\alpha)]^2}-\sum_{j=1}^{m}\alpha\sqrt{1+[f'(j\alpha)]^2}\ ;$$

由牛顿微积分求得的$f(x)$在$[a,b]$的弧长S为

$$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

设有$\sqrt{1+[f'(x)]^2}=g'(x-\alpha)$，则

$$S=\sum_{i=1}^{n}g'(i\alpha-\alpha)\alpha-\sum_{j=1}^{m}g'(j\alpha-\alpha)\alpha\ ,$$

由定理3.1知

$$S=\sum_{i=1}^{n}g'(i\alpha-\alpha)\alpha-\sum_{j=1}^{m}g'(j\alpha-\alpha)\alpha=g(n\alpha)-g(m\alpha)=g(b)-g(a)\ ,$$

即有

$$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_a^b g'(x)dx=g(b)-g(a)\ ,$$

此即为牛顿—莱布尼茨公式。

推论3.2 $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}f(i\alpha-\alpha)\alpha-\sum_{j=1}^{m}f(j\alpha-\alpha)\alpha=F(n\alpha)-F(m\alpha)$。

通过假设3.1使得函数之间的运算变得更加的灵活，特别是对隐函数的研究起了很大的作用。

根据假设3.1在实数轴上点x的下一个连续的点为$x+\alpha$，$x+n\alpha$表示与点x在实数轴上相隔n个位置的点。

设$b>a\geq 0$，$b=n\alpha$，$a=m\alpha$；那么

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}f(i\alpha-\alpha)\alpha-\sum_{i=1}^{m}f(m\alpha-\alpha)\alpha=\sum_{i=m+1}^{n}f(i\alpha-\alpha)\alpha=\sum_{i=1}^{n-m+1}f(a+i\alpha-\alpha)\alpha\ ,$$

令$a-\alpha=A$，则有

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n-m+1}f(A+i\alpha)\alpha\ ,$$

所以在计算$\int_a^b f(x)dx$时先计算出数列$\{a_n=f(A+n\alpha)\alpha\}$的和$S_n$，再把$n-m+1$带入即得

$$\int_a^b f(x)dx=S_{n-m+1}\ 。$$

定理(连续性定理)3.2 设函数$f(x)$对任意的n（$n=0,1,2$……）有$f(x+n\alpha)=a_n$成立，则函数$f(x)$在$[x,x+n\alpha]$内连续。

定理3.3 $\int g(x+y)dy=G(x+y)-G(x)+C$，$G(x)$为$g(x)$的一个原函数.

证明：函数$f(x)$连续，$f(x+n\alpha)-f(x+n\alpha-\alpha)=f'[x+(n-1)\alpha]\alpha$，

则$f(x+n\alpha)=\sum_{i=1}^{n-1}f'[x+(i-1)\alpha]\alpha+f(x), n>1$；

根据推论(3.1)有

$f(x+n\alpha)=\int f'[x+(n-1)\alpha]dn\alpha+f(x)+c$ ；(3.1)

设$n\alpha=y$，$G(x)$为$g(x)=f'(x)$的一个原函数，以$n\alpha$为变量对$f[x+(n-1)\alpha]=f(x+n\alpha)$求积根据式(3.1)有

$\int g(x+y)dy=G(x+y)-G(x)+C$；(3.2)

在式(3.2)中令$x=0$则有

$\int g(y)dy=G(y)-G(0)+C$。

推论3.3 $\int f(x+y)dy=\int_x^{x+y}f(x)dx+C$；$\int f(x)dx=\int_0^x f(x)dx+C$。

推论(函数的均值不等式)：设$f(x)$在区间$[a,b]$连续且恒有$f(x)>0$，$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，则有

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}\geq\sqrt[n-m]{f(a+\alpha)f(a+2\alpha)f(a+3\alpha)\cdots\cdots f[a+(n-m)\alpha]},$$

其中$b-a=(n-m)\alpha$；当且仅当$f(x)$在区间$[a,b]$上有$f(x)=C$时取等号。

定义3.2 设$F(x)$是以y为自变量的函数且$y=f(x)$设$f(x+\alpha)-f(x)=g(x)$，若$g(x)$为一个恒定的常数则称$F(y)$是相对于一个均匀变量y变化的；若$g(x)$不为一个恒定的常数则称$F(y)$是相对于一个不均匀变量y变化的。

推论3.4 设x_n表示第n个变量的值，当x为均匀变量时在定义域内有

$f(x_{n+1}-x_n)=f(x_{m+1}-x_m)$，

恒成立，而当x不为均匀变量时该式不一定成立。

推论3.5 设X不为均匀变量，x为均匀变量且有$X=g(x)$，那么$f(x)$相对于x的变化率为$g'(x)f'(X)$。

定理3.4 设$G'(x)=g(x)$，$F'(x)=f(x)$，$S_n=\alpha\sum_{i=1}^{n}[f(i\alpha-\alpha)-g(i\alpha-\alpha)]$，则有$F(x)=G(x)+S_n+C$。

证明：$F(x)-G(x)=\int f(x)dx-\int g(x)dx+C_0$，

$=\sum_{i=1}^{n}f(i\alpha-\alpha)\alpha-\sum_{i=1}^{n}g(i\alpha-\alpha)\alpha+C=S_n+C$

所以$F(x)=G(x)+S_n+C$。

当已知一个函数$G(x)$，其导数$g(x)$与$f(x)$结构相似且可以在求和的过程中进行抵消时，利用定理3.4求$f(x)$的原函数$F(x)$将使得计算过程变得更为简单。

定理3.5 $f(x)=\sum_{i_n=1}^{n-1}\sum_{i_{n-1}=1}^{i_n-1}\sum_{i_{n-2}=1}^{i_{n-1}-1}\cdots\cdots\sum_{i_2=1}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2}f^{(n)}(i_1\alpha-\alpha)\alpha^n+\sum_{i=1}^{n}R_i$，其中

$$R_i=\sum_{i_n=1}^{n-1}\sum_{i_{n-1}=1}^{i_n-1}\sum_{i_{n-2}=1}^{i_{n-1}-1}\cdots\cdots\sum_{i_3=1}^{i_4-1}\sum_{i_2=1}^{i_3}\sum_{i_1=1}^{1}f^{(n-1)}(0)\alpha^{n-1}。$$

把孤立的$\sum_{i_{n-1}=1}^{i_n-1}\sum_{i_{n-2}=1}^{i_{n-1}-1}\cdots\cdots\sum_{i_3=1}^{i_4-1}\sum_{i_2=1}^{i_3}\sum_{i_1=1}^{1}f^{(n-2)}(0)\alpha^{n-2}$表示为$\sum_{i_{n-1}=1}^{n-1}\sum_{i_{n-2}=1}^{i_{n-1}-1}\cdots\cdots\sum_{i_3=1}^{i_4-1}\sum_{i_2=1}^{i_3}\sum_{i_1=1}^{1}f^{(n-2)}(0)\alpha^{n-2}$，把孤立的$\sum_{i_2=1}^{i_3}\sum_{i_1=1}^{1}f^{(1)}(0)\alpha$表示为$\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_1=1}^{1}f^{(1)}(0)\alpha$。

证明：因为$f^{(n-1)}(n\alpha)=\sum_{i=1}^{n}f^{(n)}(i\alpha-\alpha)\alpha+f^{(n-1)}(0)$所以有

$$\sum_{i=1}^{n-1}f^{(n-1)}(i\alpha)\alpha=\sum_{i_2=1}^{n-1}[\sum_{i_1=1}^{i_2}f^{(n)}(i_1\alpha-\alpha)\alpha+f^{(n-1)}(0)]\alpha=\sum_{i_2=1}^{n-1}\sum_{i_1=1}^{i_2}f^{(n)}(i_1\alpha-\alpha)\alpha^2+\sum_{i_2=1}^{n-1}f^{(n-1)}(0)\alpha$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f^{(n-1)}(i\alpha-\alpha)\alpha-f^{(n-1)}(0)\alpha。$$

所以$\sum_{i=1}^{n}f^{(n-1)}(i\alpha-\alpha)\alpha=\sum_{i_2=1}^{n-1}\sum_{i_1=1}^{i_2}f^{(n)}(i_1\alpha-\alpha)\alpha^2+\sum_{i_2=1}^{n}f^{(n-1)}(0)\alpha$，所以有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}f^{(1)}(i\alpha-\alpha)\alpha+f(0)=\sum_{i_2=1}^{n-1}\sum_{i_1=1}^{i_2}f^{(2)}(i_1\alpha-\alpha)\alpha^2+\sum_{i_2=1}^{n}f^{(1)}(0)\alpha+f(0)$$

$$=\sum_{i_3=1}^{n-1}\sum_{i_2=1}^{i_3-1}\sum_{i_1=1}^{i_2}f^{(3)}(i_1\alpha-\alpha)\alpha^3+\sum_{i_3=1}^{n-1}\sum_{i_2=1}^{i_3}f^{(2)}(0)\alpha^2+\sum_{i_2=1}^{n}f^{(1)}(0)\alpha+f(0)$$

依次类推，用数学归纳法即可得结果。

推论3.6 当$f^{(n)}(x)=0$时，$f(x)=\sum_{i=1}^{n}R_i$。

证明：在定理3.5中当$f^{(n)}(x)=0$时即得$f(x)=\sum_{i=1}^{n}R_i$。

4 结论

本文站在一种不同的角度来研究实数，对无限小与无限大的研究将对函数的极限、导数微分方程以及级数和不等式起到很大的帮助，无限对我们认识无穷和实数也起到了很大的作用；目前我们所应做的就是怎样运用函数的无限小表达式来研究函数。

注释及参考文献：

[1]吴赣昌.微积分(经管类·第四版)[M].北京:中国人民大学出版社,2011.

[2]北京大学哲学系外国哲学史教研室编译,西方哲学原著选读[M].北京:商务印书馆,1982.

[3] ZHANG Qiongli.WANG Xiamei.YIN Shaotao.et al High Preconcession numerical computation of high-degree Gatun-quadrature nodes[J].Engineering Sciences.2008,10(2):35-40.

[4]潘学锋.浅谈黎曼.积分与勒贝格积分的区别[J].甘肃联合大学学报,2007,21(5):99-102.

[5]G.盖莫夫.从一到无穷大——科学中的事实和臆测[M].暴永宁译.北京:科学出版社,1978.

[6]朱梧槚,肖奚安,宋方敏,等.无穷观问题的研究(I)——历史的回顾与思考[J].南京航空航天大学学报,2002(2):101-107.

(下转38页)

3 结语

由(9)式可知，本文所给出的估计只与所选的设计有关，所以只要所选的设计合适，其估计就应该不错。模拟发现：定理2中(9)式关于偏导数的估计是比较拟合和稳定的。这说明本文用试验设计的思想求偏导数的方法在实际应用中是值得推荐的。

注释及参考文献：

[1]张应山.正交表的数据分析及其构造[D].华东师范大学,2006.

[2]茆诗松,周纪芗,陈颖. 试验设计[M]. 北京：中国统计出版社,2004.

[3]魏木生.广义最小二乘问题的理论与计算[M]. 北京：科学出版社,2006.

[4]黄燕,吴平.SAS统计分析及应用[M].北京:机械工业出版社,2007.

Least Square Estimate of the Partial Derivatives and its SAS Procedure

LI Dong-fang

(Xuchang Electric Vocational College, Xuchang, Henan 461000)

Abstract: We are familiar with the method of the partial derivatives from the Advanced Mathematics of course, a kind of estimate can be obtained from the definition of the partial derivatives. This paper gives another method of the partial derivatives using the designs of experiments, i.e. least square estimate. And also provides its theories, gives its algorithm and some examples.

Key words: partial derivatives; designs of experiments; least square estimate

（上接35页）

New Knowledge about the Mathematical Basis of Finite and Infinite

HE Jiang-lin

(College of Urban and Rural Construction，Chengdu University，Chengdu, Sichuan 610106）

Abstract: With new thinking real number is divided into finite and infinite. The boundary of finite portion and some properties of infinite are offered in this paper. Using the part of the infinitely small and infinitely large determine the nature of the convergence of positive series redefines the limits and definitions. Several assumptions are the proof of infinite. The real number was quantified，the function is more flexible ;a new form of expression of function is given.

Key words: limited ;infinity ;limit ;function of the infinitesimal expression.