具变指标的耦合抛物系统解的爆破行为*

唐树乔,宋士勤
(亳州师范高等专科学校 理化系,安徽 亳州 236800)

【摘 要】考虑了含有变指标的耦合抛物系统 $u_t=\Delta u+\int_\Omega v^{p(x)}dx, v_t=\Delta v+\int_\Omega u^{q(x)}dx$ 非负解的爆破性质。使用上下解方法和特征函数方法,得到了其齐次 Dirichlet 问题非负解整体存在和有限时刻爆破的充分条件。

【关键词】变指标;抛物系统;整体存在;爆破
【中图分类号】O175.8 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)01-0027-02

1 引言

考虑以下耦合抛物系统

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+\int_\Omega v^{p(x)}dx, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ v_t=\Delta v+\int_\Omega u^{q(x)}dx, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega,\\ u(x,t)=v(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega\subset R^N$ 是一个有界区域,$\partial\Omega$ 光滑。连续函数 $p(x)$,$q(x)$ 满足以下条件:

(2) $0<p_-=\inf_{x\in\Omega}p(x)\le p(x)\le\sup_{x\in\Omega}p(x)=p_+<+\infty$,

(3) $0<q_-=\inf_{x\in\Omega}q(x)\le q(x)\le\sup_{x\in\Omega}q(x)=q_+<+\infty$,

初值 $u_0(x),v_0(x)$ 满足条件:

$$0\le u_0(x)\in L^\infty(\Omega), 0\le v_0(x)\in L^\infty(\Omega), \quad (4)$$

问题(1)来源于物理、化学、生物学等许多应用学科,其中的 $u(x,t)$,$v(x,t)$ 可以代表2种燃料的温度,也可以表示变化过程中的2种物质的浓度、密度等。

J.M.Chadam,A.Peirce 和 H.M.Yin 在文献[1]中讨论了如下的单个方程问题

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+\int_\Omega f(u)dx, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \end{cases} \quad (5)$$

证明了问题(5)的解对于大初值在有限时刻爆破。Souplet、Rouchon 分别在文献[2-3]中研究了 $f(u)=u^p$ 时解的渐近性态。

然而,对于一类含有变指标的非线性抛物问题解的爆破现象,却只是最近几年才开始逐渐步入人们的视野,已发表的论文也很少[4-7]。J.P.Pinasco 在文献[6]中给出了 $f(u)=a(x)u^{p(x)}$ 的情形,给出了局部解的存在性和非负解爆破的条件。Bai 和 Zheng 在文献[7]中讨论了抛物系统的爆破性质,得到了问题

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+v^{p(x)}, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ v_t=\Delta v+u^{q(x)}, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega,\\ u(x,t)=v(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \end{cases} \quad (6)$$

(6)的解的局部存在性、整体存在性以及有限时刻爆破的结论。

本文在以上文献的基础上,讨论了问题(1)的爆破行为,主要结论如下:

定理1.1 假设 $u_0(x),v_0(x)$ 满足条件(4)以及 $p(x)$,$q(x)$ 满足条件 $p_-\ge1, q_-\ge1$,则存在 $T_1>0$,使得问题(1)有唯一解 $(u(x,t),v(x,t))\in L^\infty(\Omega\times(0,T_1))\times L^\infty(\Omega\times(0,T_1))$.

定理1.2 如果 $\max\{p_+,q_+\}\le1$,那么对于任意初值 $u_0(x),v_0(x)$ 问题(1)的解整体存在。

定理1.3 如果 $\max\{p_-,q_-\}>1$,那么对于充分大的初值 $u_0(x),v_0(x)$,问题(1)的解在有限时刻爆破。

定义 若 $(\overline{u},\overline{v})$ 满足

$$\begin{cases} \overline{u}_t\ge\Delta\overline{u}+\int_\Omega\overline{v}^{p(x)}dx, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \overline{v}_t\ge\Delta\overline{v}+\int_\Omega\overline{u}^{q(x)}dx, & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \overline{u}(x,0)\ge u_0(x), \overline{v}(x,0)\ge v_0(x), & x\in\Omega,\\ \overline{u}(x,t)\ge0, \overline{v}(x,t)\ge0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \end{cases}$$

则称 $(\overline{u},\overline{v})$ 是问题(1)的上解。类似的可定义(1)的下解。

2 局部解的存在性

这一节研究方程(1)局部解的存在性。由于 $p_-\ge1, q_-\ge1$,令

$$U(x,t)=(u(x,t),v(x,t))^T, F(x,t)=\left(\int_\Omega v(x,t)^{p(x)}dx, \int_\Omega u(x,t)^{q(x)}dx\right)^T$$

故方程(1)可以写成

$$U(x,t)=\int_\Omega G(x,z,t,0)U_0(z)dz+\int_0^t\int_\Omega G(x,z,t,s)F(z,s)dzds$$

其中 $G(x,z,t,s)$ 为格林函数。考虑算子

$$Q(U):=\int_\Omega G(x,z,t,0)U_0(z)dz+\int_0^t\int_\Omega G(x,z,t,s)F(z,s)dzds$$

和集合

$$D=\{U\in E\times E, \|U\|_\infty=\|u\|_\infty+\|v\|_\infty\le M\},$$

其中 $E=C^{1,2}(\Omega\times[0,T])\cap C(\overline{\Omega}\times[0,T])$,$M>\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty$ 是常数。接下来的证明与文献[6]类似,故略去证明过程。

3 整体存在性

定理1.2的证明:设 $\phi(x)$ 是特征问题

收稿日期:2013-09-17
*基金项目:安徽省教育厅自然科学课题(项目编号:KJ2013Z217);亳州师专科研课题(项目编号:BZSZKYXM201111)。
作者简介:唐树乔(1973-),男,安徽蒙城人,副教授,主要从事非线性偏微分方程理论及其应用研究。

$$\begin{cases}-\Delta\phi(x)=1, x\in\Omega,\\ \phi(x)=0, x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

的特征函数,易知$\phi(x)>0$.

令$K=\sup\limits_{x\in\Omega}[1+\phi(x)], C_1=K^{q_+}|\Omega|, C_2=K^{p_+}|\Omega|$,再令$b=a^{q_+}C_2$,其中$a$是正数。选取充分大的,使得$a^{1-p_+q_+}\geq C_1C_2^{p_+}$,即$a\geq b^{p_+}C_1$.于是选取足够大的$a,b$,设$\overline{u}=a(1+\phi(x)),\overline{v}=b(1+\phi(x))$,下证$(\overline{u},\overline{v})$是(1)的一个上解。

$$\overline{u}_t-\Delta\overline{u}-\int_\Omega \overline{v}^{p(x)}dx=a-\int_\Omega[b(1+\phi(x))]^{p(x)}dx\geq a-b^{p_+}K^{p_+}|\Omega|=a-b^{p_+}C_1\geq 0,$$

$$\overline{v}_t-\Delta\overline{v}-\int_\Omega \overline{u}^{q(x)}dx=b-\int_\Omega[a(1+\phi(x))]^{q(x)}dx\geq b-a^{q_+}K^{q_+}|\Omega|=b-a^{q_+}C_2=0,$$

显然

$$\overline{u}(x,t)\geq 0,\overline{v}(x,t)\geq 0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),$$

又当a,b充分大时

$$\overline{u}(x,0)\geq u_0(x),\overline{v}(x,0)\geq v_0(x),\quad x\in\Omega,$$

故$(\overline{u},\overline{v})$是问题(1)的一个上解,即问题(1)的解整体存在。

4 解的爆破

定理1.3的证明:令λ_1是椭圆问题$\begin{cases}-\Delta w(x)=\lambda w(x), x\in\Omega\\ w(x)=0, x\in\partial\Omega\end{cases}$的第一特征值,$\varphi(x)>0$是相应的特征向量,并规范化为$\int_\Omega\varphi(x)dx=1$。

设$\eta(t)=\int_\Omega(u(x,t)+v(x,t))\varphi(x)dx$

则

$$\begin{aligned}\eta'(t)&=\int_\Omega(u_t(x,t)+v_t(x,t))\varphi(x)dx\\&=\int_\Omega(\Delta u+\int_\Omega v^{p(x)}dx+\Delta v+\int_\Omega u^{q(x)}dx)\varphi(x)dx\\&=\int_\Omega(v^{p(x)}+u^{q(x)})dx-\lambda_1\int_\Omega(u(x,t)+v(x,t))\varphi(x)dx\\&\geq C_1\int_\Omega(v^{p(x)}+u^{q(x)})\varphi(x)dx-\lambda_1\int_\Omega(u(x,t)+v(x,t))\varphi(x)dx\end{aligned}\tag{7}$$

其中$C_1=\frac{1}{\|\varphi(x)\|_\infty}$。

下面来处理$\int_\Omega v^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx$和$\int_\Omega u^{q(x)}(x,t)\varphi(x)dx$这两项:

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx&=\int_{\{u<1\}}v^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx+\int_{\{u\geq 1\}}v^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx\\&\geq\int_{\{u\geq 1\}}v^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx\\&=\int_{\{u\geq 1\}}v^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx+\int_{\{u<1\}}v^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx-\int_{\{u<1\}}v^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx\\&=\int_\Omega v^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx-\int_{\{u<1\}}v^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx\\&\geq\int_\Omega v^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx-1\end{aligned}\tag{8}$$

同理可得

$$\int_\Omega u^{q(x)}(x,t)\varphi(x)dx\geq\int_\Omega v^{q_-}(x,t)\varphi(x)dx-1\tag{9}$$

由(7)、(8)、(9)三式和Jensen不等式,有

$$\begin{aligned}\eta'(t)&\geq C_1[((\int_\Omega v\varphi dx)^{p_-}+(\int_\Omega u\varphi dx)^{q_-})-2]-\lambda_1\int_\Omega(u(x,t)+v(x,t))\varphi(x)dx\\&\geq C_1[(\int_\Omega v\varphi dx)^{p_-}+(\int_\Omega u\varphi dx)^{q_-}]-\lambda_1\int_\Omega(u(x,t)+v(x,t))\varphi(x)dx-2C_1\end{aligned}$$

令$m=\max\{p_-,q_-\}>1$,则

$$\eta'(t)\geq\geq C_1((\int_\Omega v\varphi dx)^m+(\int_\Omega u\varphi dx)^m)-\lambda_1\int_\Omega(u(x,t)+v(x,t))\varphi(x)dx-2C_1\tag{10}$$

容易证明

$$(\int_\Omega v\varphi dx)^m+(\int_\Omega u\varphi dx)^m\geq C_2(\int_\Omega v\varphi dx+\int_\Omega u\varphi dx)^m\tag{11}$$

其中$C_2=\frac{1}{2^m}$。于是由(10)、(11)两式可得

$$\eta'(t)\geq C_1C_2\eta^m(t)-\lambda_1\eta(t)-2C_1$$

取

$$k_0=\max\left\{\left(3\lambda_1C_1^{-1}C_2^{-1}\right)^{\frac{1}{m-1}},\left(6C_2^{-1}\right)^{\frac{1}{m}}\right\}$$

只要$\eta(0)\geq k_0$,就有$\eta'(t)\geq\frac{1}{3}C_1C_2\eta^m(t)$。在$[0,T]$上积分并注意到$m>1$,有$T\leq\frac{3(m-1)}{C_1C_2}\eta^{1-m}(0)$,从而$\eta(t)$爆破。证毕。

注释及参考文献:

[1] J.M. Chadam, A. Peirce and H.M. Yin, The blowup property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reactions, J. Math. Anal. Appl. 169(2) (1992) 313 - 328.

[2] P. Souplet,Uniform blow - up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source. J. Differential Equations,1999,153 :374 - 406.

[3] Rouchon P. Universal bounds for global solutions of a diffusion equation with a nonlocal reaction term [J]. Journal of Differential Equations, 2003,193(1) :74 - 94.

[4] S.N. Antontsev, S.I. Shmarev, Existence and uniqueness of solutions of degenerate parabolic equations with variable exponents of nonlinearity[J].J. Math. Sci. 150 (2008):2289 - 2301.

[5] S.N. Antontsev, S.I. Shmarev, A model porous medium equation with variable exponent nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions[J]. Nonlinear Anal. 60 (2005):515 - 545.

[6] J.P.Pinasco. Blow - up for parabolic and hyperbolic problems with variable exponents[J].
Nonlinear Anal. 71(2009):1094 - 1099.

[7] Xueli Bai and Sining Zheng. A semilinear parabolic system with coupling variable exponents[J]. Annali di Mathematic Puraed Application Vol.190,No.3(2011): 525 - 537.

(下转31页)

注释及参考文献：

[1]全国大学生数学建模竞赛优秀论文汇编(1992-2000)[C]. 北京:中国物价出版发社,2002.

[2]耿金花,尹涛,童刚.公交优化调度模型[J].青岛科技大学学报,2004,25(4):358-360.

[3]王明生,黄琳;闫小勇.探究城市公交客流移动模式[J].电子科技大学学报,2012,41(1):2-7.

[4]苏友富.基于车辆实时调度的公交优化措施研究[D]. 昆明理工大学,2009.

Some Mathematic Models for City Bus Dispatching

——Taking the Eleventh Bus of Zhanjiang City for Example

YIN Hui-min, ZHAO Qi-xiong, LI Guan-rong

(School of Mathematics and Computational Science，Zhanjiang Normal College，Zhanjiang，Guangdong 524048)

Abstract: Some mathematic models for city bus dispatching are built by taking the eleventh bus of Zhanjiang city for example. With the traffic information，the eleventh bus dispatching is given by solving the mathematic models.

Key words: bus dispatching; mathematic model; optimization model

(上接28页)

Blowing-up Behavior for a Coupled Parabolic System with Variable Exponents

TANG Shu-qiao，SONG Shi-qin

(Dept. of Science, Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800)

Abstract: The aim of this paper is to study the properties of nonnegative solutions of a coupled parabolic system with variable exponents. By using upper-lower solution method and eigenfunction method on it, the sufficient conditions for global existence and blow-up nonnegative solutions of the equation with homogeneous Dirichlet boundary condition are obtained.

Key words: variable exponent; parabolic system; global existence; blow-up.