第28卷第1期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.28,NO.1
2014年3月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Mar.,2014

带参数的非自治二阶系统多重解的存在性

潘文秀

(钦州学院 数学与计算机科学学院,广西 钦州 535099)

【摘 要】对于带参数的非自治二阶系统,通过使用归约方法,在求解空间的子空间上利用极大极小方法确立解的存在性,再利用一个改进的B.Ricceri三临界点定理,得到了关于该问题的三个解的存在性定理。

【关键词】极大极小方法;非自治二阶系统;归约方法;B.Ricceri定理

【中图分类号】O176.3 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2014)01-0024-03

1 引言

考虑非自治二阶系统

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \lambda \nabla F(t, u(t)) & a.e.t \in [0, T] \\ \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = u(0) - u(T) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

其中$T>0$,且$F:[0,T]\times R^N \to R$满足条件(A)。

(A)$F(t,x)$为一Caratheodory函数,且存在$a\in C(R^+,R^+)$, $b\in L^1(0,T;R^+)$,使得:

$$|F(t,x)| \le a(|x|)b(t), |\nabla F(t,x)| \le a(|x|)b(t), \forall x\in R^N, a.e\ t\in[0,T]$$

设H_T^1是如下定义的Hibert空间:

$$H_T^1 = \{u:[0,T]\to R^N \mid u 是绝对连续并且\ u(0)=u(T), \dot{u}\in L^2(0,T)\}$$

其上的内积为:$((u,v)) = \int_0^T (u(t),v(t))dt + \int_0^T (\dot{u}(t),\dot{v}(t))dt$, $\forall u,v\in H_T^1$ 由这个内积在H_T^1上的诱导的范数为:

$\|u\|_{H_T^1} = (\int_0^T |u(t)|^2 dt + \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$, $\forall u,v\in H_T^1$而在H_T^1上定义方程(1)的能量函数为:

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}|^2 dt + \lambda\int_0^T (F(t,u(t)) - F(t,0))dt$$

它是连续可微的并且在H_T^1上是弱下半连续的[1],并且对任意的$u,v\in H_T^1$,有

$$\langle \varphi'(u), v\rangle = \int_0^T (\dot{u},\dot{v})dt + \lambda\int_0^T (\nabla F(t,u), v)dt 。$$

众所周知,φ 的临界点对应于方程(1)的解。

在本文中用$\|\cdot\|$表示H_T^1上的范数,用$\|\cdot\|_2$表示 $L^2(0,T)$上的范数,$\|\cdot\|_\infty$表示$C[0,T]$上的范数,$<\cdot,\cdot>$表示Banach空间和其对偶空间之间的自然对偶,$(\cdot,\cdot)$表示R^N上的内积。

对于方程(1)的研究,已经有了很多结果[2-6]。在文献[2,3,4]中利用山路引理及最小作用原理证明了该系统解得存在性。在文献[5,6]中利用归约方法[7]得到了该系统的存在性结果。以上文献中的结论均是在梯度函数的积分以各种形式强制情况下得出的,而本文就是在弱化该条件的情况下,受文[8-9]中所使用的B.Ricceri三临界点定理[10]的启发,使用归约方法时,首先保证在子空间上至少存在一个解,然后在该解的基础上,利用一个改进的B.Ricceri三临界点定理,同时结合子空间的特殊性质,得到了在此空间上的三个解的新的存在性结果,进而得到全空间上的三解定理。

2 主要结果及证明

下面给出本文的主要结果。

定理1 设$\nabla F(t,0)\ne 0$,如果 满足条件(A)及下列条件:

(i)存在函数$\mu\in L^1(0,T;R^+)$,对任意的$x,y\in R^N$,使得$(\nabla F(t,x)-\nabla F(t,y), x-y)\le -\mu(t)|x-y|^2$;

(ii)存在函数$f,g\in L^1(0,T;R^+)$及$\alpha\in[0,1)$,使得$|\nabla F(t,x)|\le f(t)|x|^\alpha + g(t)$;则方程(1)在$H_T^1$上至少存在三个解。

证明 令$X=\{0\}$, $Y=R^N$, $Z=\tilde{H}_T^1=\{u\in H_T^1: \int_0^T u(t)dt\}$,则$H_T^1=Y\oplus Z$。定义如下函数

$$\gamma(u) = \sup_{v\in Y}\varphi(v+u), \forall u\in Z$$

对于每一固定的$u\in Z$及$v_1,v_2\in Y$,由条件(1)有

$$<-\varphi'(u+v_1)-(-\varphi'(u+v_2)), v_1-v_2>$$
$$=\lambda\int_0^T (-\nabla F(t,u+v_1)-(-\nabla F(t,u+v_2)), v_1-v_2)dt$$

收稿日期 2013-11-20

作者简介 潘文秀(1973-),女,湖南泸溪人,讲师,硕士,研究方向:非线性分析。

$\ge \lambda|v_1-v_2|^2\int_0^T\mu(t)dt=\lambda\int_0^T\mu(t)dt|v_1-v_2|^2$

由文献[7]中的定理2.3知：存在一连续映射 $\vartheta:Z\to Y$，使得 $\varphi(u+\vartheta(u))=\gamma(u)$，$\forall u\in Z$，且 $\gamma:Z\to R$ 连续可微，而且 $\gamma'(u)=\varphi'(u+\vartheta(u))|_Z$。因此 $u\in Z$ 是 γ 的临界点就说明 $u+\vartheta(u)$ 是 φ 的临界点。

由条件(ii)，$\forall u\in Z$，有

$$\gamma(u)\ge\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T|\dot u|^2dt+\lambda\int_0^T(F(t,u(t))-F(t,0))dt$$

$$\ge\frac{1}{2}\|\dot u\|_2^2-\lambda\int_0^T|\nabla F(t,u)||u|dt$$

$$\ge\frac{1}{2}\|\dot u\|_2^2-\lambda\int_0^T f(t)|u|^{\alpha+1}dt-\lambda\int_0^T g(t)|u|dt$$

$$\ge\frac{1}{2}\|\dot u\|_2^2-\lambda\|u\|_\infty^{\alpha+1}\int_0^T f(t)dt-\lambda\|u\|_\infty\int_0^T g(t)dt$$

由于 $u\in Z$，及文[1]中的Sobolev不等式：$\|u\|_\infty^2\le c_0\|\dot u\|_2^2$，得 $\gamma(u)\ge\varphi(u)\ge\frac{1}{2}\|\dot u\|_2^2-c_0\lambda\|\dot u\|_2^{\frac{\alpha+1}{2}}\int_0^T f(t)dt-\lambda\|\dot u\|_2^{\frac{1}{2}}\int_0^T g(t)dt$

由文献[1]中的Wirtinger不等式知 $\|u\|=(\int_0^T|\dot u(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}$ 等价于 $\tilde H_T^1$ 上的范数。所以在 $\tilde H_T^1$ 中，当 $\|u\|\to+\infty$ 时，有 $\gamma(u)\to+\infty$。即存在一点 $v_0\in Z$，使得 $\gamma(v_0)=\min_{u\in Z}\gamma(u)$。因此 $v_0+\vartheta(v_0)$ 是方程(1)的鞍点型解。下面从 v_0 出发，在 $\tilde H_T^1$ 上寻找问题(1)的三个解。

由于当 $u\in\tilde H_T^1$，有

$\gamma(u)=\frac{1}{2}\int_0^T|\dot u|^2dt+\lambda\int_0^T(F(t,u+\vartheta(u))-F(t,0))dt$。

此时我们取

$\Phi(u)=\frac{1}{2}\|\dot u\|_2^2$，$\Psi(u)=\int_0^T(F(t,u+\vartheta(u))-F(t,0))dt$，

则 $<\Phi'(u),v>=\int_0^T(\dot u,\dot v)dt$，$<\Psi'(u),v>=\int_0^T(\nabla F(t,u+\vartheta(u)),v)dt$。

显然，由于范数是弱下半连续，所以 $\Phi:\tilde H_T^1\to R$ 是一连续G可微且序列弱下半连续，且由文[1]中的Th26.A知其有可逆的G导数。下证 $\Psi(u)$ 的G导算子是紧的。

设 $\{u_n\}$ 为 $\tilde H_T^1$ 中的一有界序列，则存在一子序列仍记为 $\{u_n\}$，使得在 $\tilde H_T^1$ 中 $u_n\xrightarrow{w}u$。由文[1]中的命题1.2知在 $C([0,T];R)$ 中 $u_n\to u$，可得存在一正数 M_1，使得 $\|u_n\|_\infty\le M_1$。由 ϑ 的连续性知在 $C([0,T];R)$ 中 $\vartheta(u_n)\to\vartheta(u)$，因此在 $C([0,T];R)$ 中 $u_n+\vartheta(u_n)\to u+\vartheta(u)$，同时可得存在一正数 M_2，使得 $\|\vartheta(u_n)\|_\infty\le M_2$。所以存在一正数 M_3，使得 $\|u_n+\vartheta(u_n)\|_\infty\le M_3$。$M=\max\{M_3,\|u+\vartheta(u)\|_\infty\}$，由条件(A)得

$|\nabla F(t,u_n+\vartheta(u_n))-\nabla F(t,u+\vartheta(u))|\le a(M)b(t)$。

由Lebesgue控制收敛定理得

$<\Psi'(u_n),v>\to<\Psi'(u),v>$，

即 Ψ 是紧的。

由前所证在 $\tilde H_T^1$ 中，当 $\|u\|\to+\infty$ 时，有 $\gamma(u)\to+\infty$，即 $\lim_{|u|\to+\infty}(\Phi(u)+\lambda\Psi(u))=+\infty$。满足文[7]中ThA的条件(1)。

如果 $v_0=0$，则 $\theta(0)$ 是非自治二阶系统的一个解，有 $<\varphi'(\vartheta(0),\vartheta(0))=0$。而由条件(i)知 $\vartheta(0)=0$，这说明0是系统的一个解，与 $\nabla F(t,0)\ne0$ 矛盾。

由于 $v_0\ne0$，那么取 $u_0=0$，$u_1(t)=v_0$，其中 v_0 满足前面的 $\gamma(v_0)=\min_{u\in Z}\gamma(u)$。则必存在一常数 r，使得

$\Phi(u_1)=\frac{1}{2}\|\dot v_0\|_2^2\ge\frac{6}{T}\|v_0\|_\infty^2>r>\Phi(u_0)$，

满足文[7]中ThA的条件(2)。而

$$\inf_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])}\Psi(u)=\inf_{\|\dot u\|_2^2\le r}[\int_0^T(F(t,u+\theta(u))-F(t,0))dt]$$

$$=\inf_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])}[\frac{1}{\lambda}(\gamma(u)-\Phi(u))]\ge\frac{1}{\lambda}[\inf_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])}\gamma(u)-\sup_{u\in\Phi^{-1}((-\infty,r])}\Phi(u)]$$

$$\ge\frac{1}{\lambda}[\gamma(v_0)-\frac{1}{2}\|\dot v_0\|_2^2]=\Psi(v_0)=\Psi(u_1)=r\cdot\frac{\Psi(u_1)}{r}>r\cdot\frac{\Psi(u_1)}{\Phi(u_1)}$$

则ThA中的条件(3)满足。所以存在一开区间 $\Lambda\subseteq[0,+\infty)$ 及一正实数 ρ，使得对任意 $\lambda\in\Lambda$，$\gamma'(u)=\Phi'(u)+\lambda\Psi'(u))=0$ 在 $\tilde H_T^1$ 中至少有3个解，其范数均小于 ρ。证毕。

定理2 设 $\nabla F(t,0)\ne0$，如果 F 满足条件(A)及定理1中的条件(i)和下列条件：

(iii)存在函数 $f,g\in L^1(0,T;R^+)$ 且 $\int_0^T f(t)dt<\frac{1}{2c_0\lambda}$，使得 $|\nabla F(t,x)|\le f(t)|x|+g(t)$；其中 $c_0=\frac{1}{T+T^1}$，则方程(1)至少存在3个解

证明 令 $X=\{0\}$，$Y=R^N$，$Z=\tilde H_T^1=\{u\in H_T^1:\int_0^T u(t)dt\}$，则 $H_T^1=Y\oplus Z$。定义如下函数

$\gamma(u)=\sup_{v\in Y}\varphi(v+u)$，$\forall u\in Z$。

由条件(i)及定理1的前部分证明知存在一连续映射$\vartheta:Z\to Y$,使得$\varphi(u+\vartheta(u))=\gamma(u)$, $\forall u\in Z$,且$\gamma:Z\to R$连续可微,而且$\gamma'(u)=\varphi'(u+\vartheta(u))|_Z$, 因此$u\in Z$是$\gamma$的临界点就说明$u+\vartheta(u)$是$\varphi$的临界点。下证在Z上存在$\gamma$的临界点。

由条件(iii),$\forall u\in Z$,有

$$\gamma(u)\ge\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T[|\dot{u}|^2\mathrm{d}t+\lambda\int_0^T(F(t,u(t))-F(t,0))\mathrm{d}t$$

$$\ge\frac{1}{2}\|\dot{u}\|_2^2-\lambda\int_0^T|\nabla F(t,u)||u|\mathrm{d}t$$

$$\ge\frac{1}{2}\|\dot{u}\|_2^2-\lambda\int_0^T f(t)|u|^2\mathrm{d}t-\lambda\int_0^T g(t)|u|\mathrm{d}t$$

$$\ge\frac{1}{2}\|\dot{u}\|_2^2-\lambda\|u\|_\infty^2\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\lambda\|u\|_\infty\int_0^T g(t)\mathrm{d}t$$

由于$u\in Z$,及文[1]中的Sobolev不等式: $\|u\|_\infty^2\le c_0\|\dot{u}\|_2^2$得

$$\gamma(u)\ge\varphi(u)\ge\frac{1}{2}\|\dot{u}\|_2^2-c_0\lambda\|\dot{u}\|_2^2\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\lambda\|\dot{u}\|_2\int_0^T g(t)\mathrm{d}t$$。

由文献[1]中的Wirtinger不等式知$\|u\|=(\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$等价于$\tilde{H}_T^1$上的范数。由于$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t<\frac{1}{2c_0\lambda}$,所以在$\tilde{H}_T^1$中,当$\|u\|\to+\infty$时,有$\gamma(u)\to+\infty$。即存在一点$v_0\in Z$,使得$\gamma(v_0)=\min_{u\in Z}\gamma(u)$。因此$v_0+\vartheta(v_0)$是方程(1)的鞍点型解。

注释及参考文献:

[1] Mawhin J,Willim M.Critical Point Theory and Hamiton System[M].New York: Springer - Ver leg,1989.

[2] C.Tang.Periodic Solutions For Nonauto - nomous Sec - ond Order System With Subli - near nonlinearity[J] . Proc.Amer. Math. Soc.11(126) (1998):3263 - 3270.

[3]X.Wu,F.Zhao.Saddle Point Characteriz - ation of So lutions for Nonautonomous Second Order System s[J].Nonlinear Anal.54(2003):1 - 7.

[4]陈劲,赵富坤.某类非自治二阶系统具鞍点特征的周期解的存在性[J].宁夏大学学报,2006,27(4) :305 - 307 Chen Jin, Zhao Fukun. Existence of Periodic Solutions with Saddle Point Characteristics for Some Non - Autonomous Second Order Systems[J].Journal of Ningxia University ,2006,27(4) :305 - 307.

[5] Nurbek Aizmahin, Tianqing An. The existence of periodic solutions of non - autonomous second - order Hamiltonian systems[J]. Nonlinear Analysis: Theory,Methods & Applications, 2011, 74(14): 4862—4867.

[6] X wu. Saddle point characterization and multiplicity of periodic solutions of non - autonomous second order systems [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods&Applica tions, 2004, 58 (7—8): 899—907.

[7] H.Amann,Saddle Points and Mutiple Solutions of Differential Equat - ions[J].Math.Z.169(1979) :127 - 166.

[8]许万银.一类拟线性Neumann问题的多重解[J].山东大学学报(理学版) ,2009,44(10): 39 - 42.

[9]闪海丽,沈自飞.具有Dirichlet边界条件的一类拟线性椭圆方程组的多重解的存在性[J].应用泛函分析学报,2011,13(2): 154 - 160.

[10] Gabriele Bonannao. A minimax inequ - ality and its applications to ordinary differential equations [J].JMath Anal Appl, 2002, 270(1) :210 - 229.

Multiplicity of Solutions on Non-autonomous Second System with Parameter

PAN Wen - xiu

(School of Mathematical And Computer Science ,Qinzhou University, Qinzhou, Guangxi 535099)

Abstract: Existence of one solution of non - autonomous second system on subspace is gained by using the min - max methods and the reduction method.Underlying this,we get three solutions by virtue of B.Ricceri theorem.

Key words: the min - max methods; non - autonomous second system; the reduction method; B.Ricceri theorem