学习《高等数学》应注意的若干问题(一)*

——函数的极限

秦　川,都俊杰
(长江大学 工程技术学院,湖北 荆州 434020)

【摘　要】函数的极限是《高等数学》的基础,它引出了函数的连续、导数和定积分的概念,因此求解极限是一个非常重要的问题。本文先介绍了求函数(数列)极限的常见方法,再结合例题分析了在求极限过程中应注意的问题,最后简要说明了极限在高等数学其他章节中的应用。

【关键词】高等数学;极限;洛必达法则;等价无穷小;分段函数
【中图分类号】O171　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2013)02-0026-03

1 引言

为了帮助工科学生理解和分析《高等数学》中的复杂而又重要的问题,并为教授这门课程的教师提供一些有用的参考,笔者按照授课的内容和顺序,以一个系列的文章形式来阐述该课程教学大纲中的几个重要知识点,以及这些知识在整个教学内容中所起的作用和地位。

本文所选内容为《高等数学》[1](同济大学应用数学系编,高等教育出版社,第六版)的相关章节,以一系列教学研究来阐明笔者对《高等数学》中若干问题的理解和解释,其中部分涉及新解题方法和解题技巧。该系列的文章由如下六个部分构成:

(1)函数的极限;

(2)微分中值定理;

(3)不定积分的换元积分法;

(4)多元函数的求导法则;

(5)重积分的计算;

(6)两类曲面积分之间的联系;

教学的实践证明:这些方法和技巧对解题和教学是很有效果的。这一系列文章的全部方法和技巧已融入了笔者近几年的教学过程中,希望将之整理给学生在自学和教师在讲解过程中用以参考。

《高等数学》是高等院校工科学生的数学类基础课程。作为课程本身,它有一套“基本概念,性质,定理,公式以及实际应用”的体系[2]。因此,在教与学这门课程时,应把握其中关键定义、定理的思想内涵,以及学会分析问题和解决问题的能力。对于一些基本公式,在学生学习的过程中应加以技巧性记忆,它们是学好本课程的基础。当然,多练习能帮助学生更牢固记忆公式和熟悉解题思想与方法。在练习的过程中要举一反三,达到学好《高等数学》的目的。

此文作为系列文章的第一部分,阐述求函数极限的常用方法和解题技巧,并指出在解题过程中应注意的问题和解题的一般思路。

2 极限求解方法

在这里列出求函数(数列)极限的方法,将之归纳在一起,是为了给教师与学生在总结归纳时提供参考,且学生在分析研究时,可以将纷繁的命题综合归纳分类,将解决同类性质问题的命题划至一个集合,在遇到这一性质的问题时,筛选集合中的命题,找出最合适的来解决问题,从而最终提高我们的解题速度和提升解决问题的能力[3]。

(1)利用函数(数列)极限的定义进行计算,即 $\varepsilon-N$, $\varepsilon-\delta$ 语言来证明,例如:求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;

(2)利用数列的求和公式,例如:求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$;

(3)夹挤准则求极限[4](又称“两边夹”准则),例如:求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})$;

(4)单调有界收敛准则求极限,例如:设 $0<x_1<3$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求此极限;

(5)利用定积分的求和式来求极限,例如:求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(1+\dfrac{i}{n})^2=\int_1^2\ln x^2dx$;

(6)利用等价无穷小求极限,例如:求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x^2}{\ln(1+x)\sin x}$;

(7)利用函数极限与数列极限的关系求极限,例如:求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{\pi}\arctan\sqrt{n})^n$ 可转化为求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{\pi}\arctan x)^{x^2}$;

(8)利用导数的定义来求极限,例如:设f′(0)存在且f(0)=0,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}$;

收稿日期:2013-04-18
*基金项目:长江大学工程技术学院教研项目(项目编号:JY201114)。
作者简介:秦　川(1984-　),女,湖北随州人,讲师,硕士,研究方向:泛函分析及其应用。

(9)利用极限与连续的关系来求极限,例如:求 $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x^2+e^x)$;

(10)利用泰勒(Taylor)公式求极限,例如:求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}$;

(11)洛必达法则求极限,例如:求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$;

(12)利用数列的递推公式求极限,例如:

$$\lim_{n\to\infty}\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\,(x\neq 0);$$

(13)施笃兹(Stolz)法则[5]求极限,例如:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n};$$

(14)斯特林(Stirling)公式求极限,例如:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}};$$

(15)利用级数收敛的一些结论求极限,例如求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n})$,实际上该极限等同于求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$,可以先求解幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和,再令x=1即可;

(16)"抓大头"原则求极限,例如:求

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1$$

(因sinx,cosx当x→∞时有界);

(17)利用积分中值定理求极限,例如:求

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$$

以上介绍每一种方法时,笔者都用一个题目来举例,每一个例题代表了这一类型的题目,希望大家在求解每一个题目时总结归纳出这一类型题目的特征,使这些方法能真正应用自如。当然,很多题目的求解也可能会融合以上的几个方法,多看多练,就会融会贯通[6]。

3 求解极限注意事项

(1)一些特殊函数求极限

例1 求

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

解　由于式中含有 $e^{\frac{1}{x}}$ 及 $|x|$,应考虑左、右极限。

记 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$,由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\frac{2+0}{1+0}-1=1$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

在解题时易将上述极限分开成两个极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 来讨论,而这两个极限均不存在,很多同学会认为此极限不存在。值得注意的是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 均存在只是 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 存在的充分而非必要条件。

类似地,针对分段函数在分段点处的极限,又如 $\arctan\dfrac{1}{x}$, $\mathrm{arc}\cot\dfrac{1}{x}$, $a^{\frac{1}{x}}(a>0,a\neq 1)$ 当 $x\to 0^+$ 与 $x\to 0^-$ 时左右极限不相等。

(2)利用洛必达法则时应注意的问题

ⅰ)洛必达法则只针对于 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 两种未定式,每一次应用法则前要判断是否为此类未定式;

ⅱ)当x→∞时,极限式中含sinx,cosx,以及当x→∞时,极限式中含 $\sin\dfrac{1}{x}$, $\cos\dfrac{1}{x}$,不能用洛必达法则;

ⅲ)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(∞除外)时,不能说明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在,此时只能选用其它方法来求解;

ⅳ)在运用洛必达法则求极限前,要结合等价无穷小等方式将极限式尽可能化简。

例2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\left(x\ln(1+x)-x^2\right)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\left(x\ln(1+x)-x^2\right)}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\left(x\ln(1+x)-x^2\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\frac{1}{2}x^2)}{x(\ln(1+x)-x)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+x)-x}$$

再利用一次洛必达法则即可,避免了直接使用洛必达法则时,分子分母求导后得到复杂的极限式。

(3)用等价无穷小替换时应注意的问题

ⅰ)等价无穷小有x→∞的前提,结合变量代换法,当α(x)→0时,可用sin α(x): α(x), $1-\cos\alpha(x):\frac{1}{2}[\alpha(x)]^2$ ln(1+α(x)): α(x)等类似的形式;

ⅱ)我们常说,在乘除法中可用等价无穷小因子替换,在加减法中不能用等价无穷小因子替换。这也是许多同学解题时的误区,看到乘除法就进行等价替换,如

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(x+1)}{x^3}\neq\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot x-x(x+1)}{x^3}$$

4 极限的应用

极限的应用主要在以下几个方面:

(1)判断间断点的类型或判断函数在某点的连续性;

(2)引出导数的定义和定积分的定义;

(3)求解一元函数的渐近线;

(4)判定反常积分的敛散性;

(5)判定无穷级数的敛散性及求幂级数的收敛半径。

由于函数的极限是微积分的基础,而函数极限的求解又是一个非常繁琐的问题,很多同学在解题时没有任何思路。本文主要通过不同的例题总结了求函数极限的常用方法和求极限过程中应注意的问题,并介绍极限在高等数学其他章节的应用。仔细研读本文,使之成为自己的思想,可以帮助快速求解函数的极限。

注释及参考文献:

[1]同济大学应用数学系.高等数学(第六版)[M].北京:高等教育出版社,2007.

[2]秦川.如何做好高等数学的教学[J].科技信息,2011(8):122-123.

[3]叶芳慧,陈青艳.高等数学教学中存在的问题分析及解决方法[J].玉林师范学院学报(自然科学),2012(2):21-24.

[4]边军辉,杨晓忠,刘志勇.高等数学学习方法探析[J].山西电子技术,2012(4):85-87.

[5]李世金,赵洁.数学分析解题方法600例[M].长春:东北师范大学出版社,1992.

[6]陈娟.对高等数学教学改进的一点思考[J].教改创新,2012(8):54-55.

Problems Should be Given Attention in Studying Higher Mathematics

——The Limit of Function

QIN Chuan, DU Jun-jie

(College of Technology and Engineering, Yangtze University, Jingzhou, Hubei 434020)

Abstract: The limit of function, which brings out the definitions of continuous function, derivative, definite integral, is the basis of "Higher Mathematics". Thus, solving the limit of function is a very important problem. Firstly, we will introduce the common methods for solving the limit of function (sequence) in this paper. Secondly, we will give some examples to analysis the problems wihich should be paid attention to. Finally, we will obtain a brief description on the application of limit in other chapters of "Higher Mathematics".

Key words: Higher mathematics; Limit; L' Hospital rule; The equivalent infinitesimal; Piecewise function