二元函数极限求解的方法和策略

邱建玲
（福建林业职业技术学院，福建 南平 353000）

【摘　要】函数极限概念与函数极限求法是近代微积分学的基础，文章对二元函数极限定义和它们的求解方法进行了归纳和总结，并在某些具体的求解方法中就其中要注意的细节和技巧做了说明，以便于我们了解函数的各种极限以及对各类函数极限计算方法。函数极限的求法有很多，每种方法都有其优缺点，对某个具体的求极限问题，我们可以根据它的类型选择最优的方法。

【关键词】二元函数；极限概念；定理；极限求法
【中图分类号】O174.1　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2013)02-0021-02

1 二元函数极限的概念

设f为定义在$D\subset R^2$上的二元函数，P_0为D的一个聚点，A是一个确定的实数。若对任给正数ε，总存在某正数δ，使得当$P\in U^0(P_0;\delta)\cap D$时，都有$|f(P)-A|<\varepsilon$，则称f在D上当$P\to P_0$时，以A为极限，记作$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in D}} f(P)=A$[1-4]

2 二元函数极限的求法

2.1 利用二元函数的极限的定义求极限

根据$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A\Leftrightarrow$点(x,y)沿任意连续曲线趋于$(x_0,y_0)$时f(x,y)趋于A。我们可取某一特殊方向y=kx，求出当(x,kx)趋于(x_0,y_0)时，f(x,y)的极限，然后再利用定义验证这一极限即为所求极限[5-6]。

例　设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, 当x\neq0且y\neq0\\ 0, 当x=o,y\neq0或x\neq0,y=0\end{cases}$

求$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

解　取特殊方向y=x，求出(x,y)沿直线y=x趋于(0,0)时的极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=x}} f(x,x)=\lim_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}2x\sin\frac{1}{x}=0$$

现在用定义证明$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

对∀ ε>0，(1)当x=0，y≠0或x≠0，y=0时，则∀δ>0当$|x-0|<\delta$，$|y-0|<\delta$，(x,y)≠(0,0)时，有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$

(2)当 x≠0，y≠0 时，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当$|x-0|<\delta$，$|y-0|<\delta$，(x,y)≠(0,0)时，有

$$|f(x,y)-0|=\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\le\left|x\sin\frac{1}{y}\right|+\left|y\sin\frac{1}{x}\right|$$

$$\le|x|\left|\sin\frac{1}{y}\right|+|y|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|+|y|<2\delta=\varepsilon$$

于是，对∀ ε>0，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当$|x|<\delta$，$|y|<\delta$，(x,y)≠(0,0)时，有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

2.2 利用连续函数的定义及初等函数的连续性求解

若f(x,y)在点(x_0,y_0)处连续，则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

例　求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$

解　因为$\frac{1-xy}{x^2+y^2}$在(0,1)处连续

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\left.\frac{1-xy}{x^2+y^2}\right|_{(0,1)}=\frac{1-0}{0+1}=1$

2.3 利用极限的四则运算求解

定理　设$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，函数f(x,y)和g(x,y)的极限存在，则

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)\pm g(x,y))=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\pm\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f(x,y)g(x,y))=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right)=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}\left(\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\neq0\right)$[7-9]。

例　求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}=\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{x^2}{e^x}\frac{1}{e^y}+\frac{y^2}{e^y}\frac{1}{e^x}\right)$

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$且$\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y}=0$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{x^2}{e^x}\frac{1}{e^y}=0$

同理$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\frac{y^2}{e^y}\frac{1}{e^x}=0$

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$

2.4 利用有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量求解

定理　若当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，$f(x,y)\to0$，而g(x,y)为有界变量，则当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，$f(x,y)g(x,y)\to0$[10]。

收稿日期：2013-05-22
作者简介：邱建玲（1968-　），女，讲师，主要从事高等数学教学与研究。

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt[3]{x}+y\right)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$

解 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt[3]{x}+y\right)$

当x→0,y→0时,$\sin\frac{1}{x}$与$\cos\frac{1}{y}$均有界变量

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt[3]{x}+y\right)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}=0$

2.5 利用等价无穷小替换求解

定理 设α与α',β与β'均是等价无穷小量,即α:α',β:β',若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=A$(或∞)时,

则必有$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}=\lim\frac{\beta}{\alpha}=A$(或∞)。

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$

解 因为$1-\cos\left(x^2+y^2\right):\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2\left((x,y)\to(0,0)\right)$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}=\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}\geq\frac{1}{|xy|}$$

又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{|xy|}=+\infty$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}=+\infty$

2.6 利用分子或分母有理化求解

若遇到分子和分母的极限均为0的非有理分式函数极限时,若分子或分母中含有根式,不能运用商的极限运算法则时,可先采用分子或分母根式有理化,消去分子、分母中趋于零的因子,再运用极限运算法则求极限。

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$

解 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1+x^2+y^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^2+y^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2+y^2}+1\right)}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{1+x^2+y^2}+1\right)}{\left(1+x^2+y^2\right)-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\sqrt{1+x^2+y^2}+1\right)=2$

2.7 利用夹逼定理求解

若在(x_0,y_0)的某个领域内,成立不等式$u(x,y)\leq f(x,y)\leq \nu(x,y)$,且$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\nu(x,y)=A$,则$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

解 因为 $0\leq\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$

3 小结

对于求二元函数极限,其中很多地方都能使用到求解一元函数极限的方法:定义求解法、无穷小替代法,夹逼法等都能从中看到求一元函数极限的方法的踪迹,要解得一个二元函数的极限就必须得熟练的掌握好一元函数极限的求解方法,将其方法融入到求解二元函数极限中去,从而使得问题更加的简单化,明朗化。

注释及参考文献:

[1]王艳,周文丽,张俊丽,等.求极限的几种方法[J].西安欧亚学院学报,2005(3):79-83.
[2]张宏达.高等数学中求极限的常用方法[J].北京交通管理干部学院报,2004(3):39-41.
[3]胡喜和.谈求极限的方法[J].内蒙古电大学刊,2005(1):108-109.
[4]徐荣贵,叶红.微积分的基本思想[J].四川工程职业技术学院学报,2008(6):54-55.
[5]王伟珠.常用求极限方法浅析[J].中国科教创新导刊,2007(4):72.
[6]欧阳光中,朱学炎,金福临,等.数学分析[M].高教出版社,1978:71-72.
[7]华东师范大学数学系.数学分析下册[M].第3版.北京:高等教育出版社,2001:76-77.
[8]彭舟,姬燕.数学分析同步辅导下册[M].第3版.北京:航空工业出版社,2005:68-69.
[9]西北工业大学高等数学教研室.高等数学中的典型问题与解法[M].第2版.上海:同济大学出版社,2001:23-24.
[10]费定晖,周学圣.数学分析习题集题解(五)[M].济南:山东科学技术出版社,2005:43-45.

Methods and Strategies for Solving Binary Function Limit

QIU Jian-ling
(Fujian Forestry Vocational and Technical College, Nanping, Fujian 353000)

Abstract: The concept of functional limit and the limit of function method is the basis of modern calculus. The

(下转25页)

4 结论

本文给出了求解一类对流占优奇异系数多孔介质方程的局部间断有限元方法。通过对方程等价变形,给出了处理方程奇异系数的方法和详细的局部间断有限元格式。该方法以间断多项式空间为求解空间,并引入具有稳定机制的对流流通量以及扩散流通量,可以有效抑制传统有限元方法求解对流占优问题时的数值伪震荡。数值实验表明该方法能有效求解对流占优奇异系数多孔介质方程。

注释及参考文献:

[1]张国亮,张凤宝,王绍亭,等.用正交配置法求解血液透析超滤的传质动力学模型[J].化工学报,1993,44(5):609-616.

[2]刘儒勋,舒其望.计算流体力学的若干新方法[M].北京:科学出版社,2003.

[3]王阿霞,马逸尘.对流占优的扩散问题的局部间断Galerkin方法[J].西安交通大学学报,2008,42(2):234-237.

A Local Discontinuous Galerkin Finite Element Method for the Numerical Solution of a Convection-dominated Equation in Porous Media with Singular Coefficient

LIU Hong-xia[1], XU Na[2]

(1.Department of Basic Courses, Dongguan Polytechnic, Dongguan, Guangdong 523808; 2.CAE Center, Guangzhou Institutes of Advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou, Guangdong 511458)

Abstract: A local discontinues Galerkin finite element method for the numerical simulation of a convection-dominated equation in porous media with singular coefficient is studied in this paper, and the scheme of the local discontinuous method is given in detail for the singular equation studied. By rewriting the original equation into proper form and introducing the convective and diffusive numerical fluxes, the method can effectively overcome numerical oscillation occurred in case of convection-dominated problems. Numerical results are also given to show the effectiveness of the method.

Key words: Singular coefficient; Local discontinuous Galerkin finite element; Convection-dominated

(上接22页)

article summarized the defimition binary function of limit and their solving method, and explained the detail and techniques which should be paid attemtion to some specific methods. so that we can understand the function of the various limits, as well as all types of functional limit. Each method of function to limit has its advantages and disadvantages. As for the specific problem of limit, we can choose the best according to its type.

Key words: Binary function; The concept of limit; Theorem; The calculation method of Limit