泰勒公式及其应用*

鲁翠仙
(临沧师范高等专科学校 数理系,云南 临沧 677000)

【摘　要】泰勒公式是数学分析中的一个重要公式,它可将一些复杂函数近似地表示为简单的多项式函数,这种化繁为简的功能,使它成为分析和研究其他函数问题的有力杠杆。本文主要归纳了其在不等式证明、求极限等方面的应用。

【关键词】泰勒公式;证明;应用
【中图分类号】O172 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2013)01-0038-04

泰勒公式是数学分析中非常重要的内容,在解题中有着重要的作用,是研究函数极限和估计误差等方面不可或缺的数学工具,它的基本思想是用多项式来逼近一个已知函数,而这个多项式的系数由给定函数的各阶导数确定。

1 泰勒公式的概述

将n次多项式函数P(x)按着x-a的幂展开,它每项的系数b_k由多项式函数P(x)唯一确定,即$b_k=\frac{p^{(k)}(a)}{k!}$。

若任意一个函数f(x)(不一定是多项式函数),只要函数f(x)在a存在n阶导数,总能形式地写出一个相应的n次多项式 $T_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n$

称为函数f(x)在a的n次泰勒多项式。

将函数f(x)与它的n次泰勒多项式$T_n(x)$的差,表为$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$或$f(x)=T_n(x)+R_n(x)$。$R_n(x)$称为f(x)在a的n次泰勒余项,简称泰勒余项。

2 泰勒公式的应用

2.1 利用泰勒公式求极限

对于待定型的极限问题,一般采用洛必达法则来求。但是对于一些求导比较繁琐,特别是要多次使用洛必达法则的情况下,泰勒公式往往是比洛必达法则更为有效的求极限工具。

例1　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$。

解　由于分式的分母$\sin^3x\sim x^3(x\to 0)$,只需将分子中sinx和xcosx分别用带有佩亚诺型余项的三阶麦克劳林公式表示,即$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$,$x\cos x=x-\frac{x^3}{2!}+o(x^3)$,于是$\sin x-x\cos x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x+\frac{x^3}{2!}-o(x^3)=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$,

对上式作运算时,把两个比x^3高阶的无穷小的代数和记为$O(x^3)$,故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$。

2.2 泰勒公式在方程中的应用

如果函数在点x_0处可导,则有在这点附近用一次多项式去逼近函数f(x),其误差为高阶无穷小量$O((x-x_0)^n)$。再用二次多项式或高于二次多项式去逼近,我们可以看出二次切线或者高次切线与曲线的接近程度比一次切线要好,当然次数越来越高时,接近程度越来越密切,近似程度越来越高。

例2　设f(x)在$(-\infty,+\infty)$内有连续三阶导数,且满足方程$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$,$0<\theta<1$($\theta$与h无关),试证f(x)是一次或二次函数。

证明　问题在于证明,$f''(x)\equiv 0$或$f'''(x)\equiv 0$,为此将原式对h求导,注意θ与h无关,有$f'(x+h)=f'(x+\theta h)+\theta hf''(x+\theta h)$　(1)

从而$\frac{f'(x+h)-f'(x)+f'(x)-f'(x+\theta h)}{h}=\theta f''(x+\theta h)$

令$h\to 0$取极限,得$f''(x)-\theta f''(x)=\theta f''(x)$,$f''(x)=2\theta f''(x)$

若$\theta\neq\frac{1}{2}$,由此$f''(x)\equiv 0$,f(x)为一次函数;

收稿日期:2013-01-07
*基金项目:云南省教育厅科学研究基金重点项目(项目编号:2012 Z150C),云南省教育厅科学研究基金一般项目(项目编号:2012 Y273)。
作者简介:鲁翠仙(1980-),女,云南临沧人,讲师,硕士研究生,研究方向:代数、计算方法。

若$\theta=\frac{1}{2}$,(1)式给出$f'(x+h)=f'(x+\frac{1}{2}h)+\frac{1}{2}hf''(x+\frac{1}{2}h)$,

此式两端同时对h求导,减去f''(x),除以h,然后令h→0取极限,即得f'''(x)≡0,所以f(x)为二次函数。

2.3 利用泰勒公式求函数近似值

此类题目需要先将所求数化为函数形式,利用泰勒公式及拉格朗日余项公式x=0点处展开后,再将x取值进行近似计算。

例3 求ln1.2的近似值(精确到0.0001)

解 由于ln1.2=ln(1+0.2) 设f(x)=ln(1+x)

因为$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ (k=1,2,3,…)

故$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$

$$\ln(1+x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

误差为$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{(n+1)}\right|=\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)!(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

取x=0.2,由于$\frac{0.2^6}{6}\approx 0.000011$ 故取n=5

则$\ln 1.2=\ln(1+0.2)\approx 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4+\frac{1}{2}(0.2)^5=0.1823$。

2.4 利用泰勒公式求幂级数的展开式

利用基本初等函数的幂级数展开式,通过加减乘等运算进而可以求得一些较复杂的初等函数的幂级数展开式。

$$f(x)=f(x_0)+f(x_0)f(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

例4 求函数f(x)=e^x的幂级数展开式。

解 由于$f^n(x)=e^x$,$f^n(0)=1$,(n=1,2,3……),

所以f的拉格朗日余项为$R_{(n)}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}$,(0<θ<1),

显见$|R_n(x)|\le\frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ 它对任何实数x,都有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0$,

因而,$\lim\limits_{x\to\infty}R_n(x)=0$,

所以$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$, x∈(−∞,+∞)。

2.5 泰勒公式在行列式计算方面的应用

若一个行列式可看做x的函数(一般是x的n次多项式),记作f(x),按泰勒公式在某处x_0展开,用这一方法可求得一些行列式的值。

例5 求n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解 记$f_n(x)$=D,按泰勒公式在z处展开:

$$f_n(x)=f(z)+\frac{f_n'(z)}{1!}(x-z)+\frac{f_n''(z)}{2!}(x-z)^2+\cdots\frac{f_n^{(n)}(x-z)}{n!}(x-z)^n \tag{1}$$

易知

$$D=\begin{vmatrix} z-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 0 & z-y & 0 & \cdots & 0 & y \\ 0 & 0 & z-y & \cdots & 0 & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z-y & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z-y \end{vmatrix}_{k阶}=z(z-y)^{k-1} \tag{2}$$

由(2)得，$f_k(z)=z(z-y)^{k-1}, k=1,2,\cdots,n$ 时都成立。

根据行列式求导的规则，有

$f_n^{'}(x)=nf_{n-1}(x), f_{n-1}^{'}(x)=(n-1)f_{n-2}(x),\cdots, f_2^{'}(x)=2f_1(x), f_1^{'}(x)=1$(因为$f_1(x)=x$)

于是$f_n(x)$在x=z处的各阶导数为

$f_n^{'}(z)=f_n^{'}(z)|_{x=z}=nf_{n-1}(z)=nz(z-y)^{n-2}$,

$f_n^{''}(z)=f_n^{''}(z)|_{x=z}=nf_{n-1}^{'}(z)=n(n-1)z(z-y)^{n-3}$,

… … … …

$f_n^{n-1}(z)=f_n^{n-1}|_{x=z}=n(n-1)\cdots 2f_1(z)=n(n-1)\cdots 2z$,

$f_n^{(n)}(z)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1$,

把以上各导数代入(1)式中，有

$$f_n(x)=z(z-y)^{n-1}+\frac{n}{1!}z(z-y)^{n-2}(x-z)+\frac{n(n-1)}{2!}z(z-y)^{n-3}\cdot(x-z)^2$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1\cdots 2)}{(n-1)!}z(x-z)^{n-1}+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}(x-z)^n$$

若z = y，有$f_n(x)=(x-y)^{n-1}[x+(n-1)y]$,

若z≠y，有$f_n(x)=\dfrac{z(x-y)^n-y(x-z)^n}{z-y}$。

2.6 泰勒公式在证明中的应用

2.6.1 泰勒公式在中值定理证明中的应用

微分学上的一些基本定理统称为中值定理，中值定理是导数应用的理论基础，研究的是函数在区间上的"整体"状态。

例6　设f(x)在[a,b]上三次可导，试证：∃c∈(a,b)使得

$$f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f^{(n)}(c)(b-a)^3 \tag{1}$$

证明　(待定常数法)设k为使下式成立的实数

$$f(b)-f(a)-f'(\frac{a+b}{2})(b-a)-\frac{1}{24}k(b-a)^3=0 \tag{2}$$

这时，我们的问题归为证明，∃c∈(a,b)使得k=f'''(c)　(3)

令

$$g(x)=f(x)-f(a)-f'(\frac{a+x}{2})(x-a)-\frac{k}{24}(x-a)^3 \tag{4}$$

则g(a)=g(b)=0

根据罗尔定理，∃ ζ ∈(a,b)，使得g'(ζ)=0，由(4)式，

即

$$f'(\xi)-f'(\frac{a+\xi}{2})-f''(\frac{a+\xi}{2})(\frac{\xi-a}{2})-\frac{k}{8}(\xi-2)^2=0 \tag{5}$$

这是关于k的方程，注意到f'(ζ)在点$\dfrac{a+\xi}{2}$处的泰勒公式

$$f'(\xi)=f'(\frac{a+\xi}{2})+f''(\frac{a+\xi}{2})(\frac{\xi-a}{2})+\frac{1}{2}f'''(c)(\frac{\xi-a}{2})^2 \tag{6}$$

其中c∈(a,b)，比较(5)，(6)可得式(3)证毕。

2.6.2 泰勒公式在不等式证明中的应用

在条件或结论中含有高阶导数时，一般使用泰勒公式证明。

例7 设 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ 且f''(x)>0。证明f(x)≥0

证明:因为 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

所以f(0)=0,f'(0)=1

而f(x)在x=0点处的一阶泰勒公式为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$

即 $f(x)=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$,又由于f''(x)>0,故f(x)≥x。

例8 当x≥0时,证明 $\sin x\ge x\ge x-\frac{1}{6}x^3$

证明:取 $f(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$,$x_0=0$,

则 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)=0, f'''(x)=1-\cos x, f'''(0)\ge 0$,

带入泰勒公式,其中n=3,得

$f(x)=0+0+0+\frac{1-\cos\theta x}{3!}x^3$,其中0< θ <1,

故,当x≥0时,$\sin x\ge x-\frac{1}{6}x^3$。

从上述实例可以看出泰勒公式具有广泛的应用,利用其展开式以及各种余项类型可以简单的解决一些复杂的问题,从而体现泰勒公式式在数学计算中具有重要的地位。

注释及参考文献:

[1]刘玉琏,傅沛仁,林玎.数学分析讲义:上册[M].第五版.北京:高等教育出版社,2008.
[2]李成章,黄玉民.数学分析:上册[M].北京:科学出版社,1999.
[3]华东师范大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社,2001.
[4]陈纪修,於崇华,金路.数学分析:上册[M].第二版.北京:高等教育出版社,2008.

Taylor's Formula and Its Application

LU Cui-xian
(Science Department, Lincang Teachers College, Lincang, Yunnan 677000)

Abstract: Taylor's formula is an important equation of mathematical analysis. It can change some complicated functions into the simple polynomial function approximatively. This Rind of turn is a powerful leverage for the analysis and research of other functions. It introduced its application in inequality proving, the limit finding, etc, in this paper.

Key words: Taylor's formula; Prove; Applications