Hilbert空间中一类平衡问题变分不等式问题和不动点问题的强收敛定理及其对最优化问题的应用*

冯仁勇,何中全**
（西华师范大学 数学与信息学院,四川 南充 637002）

【摘　要】在Hilbert空间中引进一种新的迭代算法,得到了一类平衡问题变分不等式问题和不动点问题的强收敛定理,所得到结果改进并推广这类问题最近的一些结果。

【关键词】平衡问题;不动点;Hilbert空间;a-逆强单调映像;迭代算法
【中图分类号】O177.91　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2013)01-0029-09

1 引言

设H是一实的Hilbert空间,C是H的一非空闭凸子集。对于任意的$x\in H$,存在唯一$x_C\in C$使得$\|x-x_C\|\leq\|x-y\|$,$\forall y\in C$。令$Px=x_C$,称P为H到C上的投影映射。

称映像$A:C\to H$为α-逆强单调的,如果存在正数$\alpha>0$,使得

$\langle Ax-Ay,x-y\rangle\geq\alpha\|Ax-Ay\|^2$, $\forall x,y\in C$。

称映像$S:C\to C$是非扩张的,如果$\|Sx-Sy\|\leq\|x-y\|$。记S的不动点集为F(S)。

设$A:C\to H$。变分不等式问题(VI)是求$z\in C$,使得

$\langle Az,y-z\rangle\geq 0$, $\forall y\in C$。

此变分不等式问题的解集用VI(C,A)表示。

设$\varphi(x,y):C\times C\to R$是平衡函数,即每一个$u\in C$, $\varphi(x,y)=0$。考虑如下平衡问题(EP):

寻找$z\in C$,使得$\varphi(x,y)\geq 0$, $\forall y\in C$。记它的解为EP。平衡问题包含了不动点问题、最优化问题、变分不等式问题、Nash平衡问题等[9]。

为了寻找$F(S)\cap VI(C,A)$的公解,Takahashi和Toyoda[6]介绍了如下的迭代序列:

$$\begin{cases}x_1\in C,\\ x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)SP_C(x_n-\lambda_n Ax_n),\forall n\geq 1\end{cases}\tag{1.1}$$

并在适当条件下得到了一个强收敛定理。

为了寻找$F(S)\cap EP(\varphi)$的公解,S.Takahashi和W.Takahashi[6]介绍了如下的迭代序列:

$$\begin{cases}x_1\in H,\\ \varphi(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geq 0,\forall y\in C,\\ x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Su_n,\forall n\geq 1\end{cases}\tag{1.2}$$

为了寻找$F(S)\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)$的公解,Su,Shang和Qin[6]介绍了如下的迭代序列:

$$\begin{cases}x_1\in H,\\ \varphi(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geq 0,\forall y\in C,\\ x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)SP_C(u_n-\lambda_n Au_n),\forall n\geq 1\end{cases}\tag{1.3}$$

并在适当条件下得到了一个强收敛定理。

为了寻找$F(S)\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)$的公解,Plubting和Punpaeng[6]介绍了如下的迭代序列:

$$\begin{cases}x_1=u\in C,\\ \varphi(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geq 0,\forall y\in C,\\ y_n=P_C(u_n-\lambda_n Au_n),\\ x_{n+1}=\alpha_n u+\beta_n x_n+\gamma_n SP_C(y_n-\lambda_n Au_n),\forall n\geq 1\end{cases}\tag{1.4}$$

收稿日期:2012-12-15
*基金项目:教育部科学技术重点项目(项目编号:211163)。
作者简介:冯仁勇(1983-　),男,四川广元人,硕士研究生,主要从事非线性分析研究。**为通讯作者何中全教授。

并在适当条件下得到了一个强收敛定理。

2008年,Chang[6]等介绍了如下迭代序列:

$$\begin{cases}\varphi(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geq 0,\forall y\in C,\\ y_n=P_C(u_n-\lambda_nAu_n),\\ k_n=P_C(y_n-\lambda_nAy_n),\\ x_{n+1}=\alpha_nf(x_n)+\beta_nx_n+\gamma_nW_nk_n\end{cases}\tag{1.5}$$

其中映像$\{W_n\}$是由一族非扩张映像$\{S_n\}$生成的,并在适当的条件下得到了一些强收敛定理。

受上述文献启发,本文在Hilbert空间中介绍了一个新的迭代序列(3.1),借以寻找平衡问题不动点问题和变分不等式问题的公共不动点,并在适当的条件下得到了强收敛定理。本文的结果推广和改进了Chang[7]等人的相应结果。

2 预备知识

定义2.1[6] 称B:H→H为强正有界线性算子,若存在常数$\dot{\gamma}>0$,使得

$$\langle Bx,x\rangle\leq\dot{\gamma}\|x\|^2,\forall x\in H$$

定义2.2[2] 设A:C→H是α—逆强单调映像,N_{cv}表示C在点$v\in C$的正规锥,即

$$N_{cv}=\{w\in H:\langle v-u,w\rangle\geq 0,\forall u\in C\}$$

$$Tv=\begin{cases}Bv+N_cv,\forall v\in C\\ \phi,v\notin C\end{cases}$$

则T是极大单调的,且$0\in Tv\Leftrightarrow VI(C,A)$。

定义2.3[6] 设$T:H\to 2^H$是集值映射,称T是

(ⅰ)单调的,如果$x,y\in H,f\in Tx,g\in Ty$,有$\langle x-y,f-g\rangle\geqslant 0$,

(ⅱ)极大单调的,如果$(x,f)\in H\times H,\langle x-y,f-g\rangle\geqslant 0,\forall(y,g)\in G(T)\Rightarrow f\in Tx$。

定义2.4[7] 设$\{S_i:C\to C\}$是一有限族的非扩张映像,且满足$\{u_n\}$是对任意$i\geqslant 1$都有$0\leqslant u_i<1$成立的非负实数序列,定义一个映射$W_n:C\to C$如下:

$$\begin{cases}U_{n,n+1}=1,\\ U_{n,n}=u_nS_nU_{n,n-1}+(1-u_n)I,\\ U_{n,n-1}=u_{n-1}S_{n-1}U_{n,n}+(1-u_{n-1})I,\\ \vdots\\ U_{n,k}=u_kS_kU_{n,k+1}+(1-u_k)I,\\ U_{n,k-1}=u_{k-1}S_{k-1}U_{n,k}+(1-u_{k-1})I,\\ U_{n,2}=u_2S_2U_{n,3}+(1-u_2)I,\\ W_n=U_{n,1}=u_1S_1U_{n,2}+(1-u_1)I,\end{cases}$$

则$W_n:C\to C$是非扩张的,且称它是由$u_n,u_{n-1},\cdots,u_1$所产生的W-映射,且映射$\left(Wx:=\lim_{n\to\infty}W_{nx}=\lim_{n\to\infty}U_{n,1}x,x\in C\right)$是非扩张的,且满足

$$F(W)=\bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i).$$

为解决平衡问题,假设$\varphi:C\times C\in R$满足如下条件:

(A1) $\varphi(x,x)=0,\forall x\in C$;

(A2) φ是单调的,即$\varphi(x,y)+\varphi(y,x)\leq 0,\forall x,y\in C$;

(A3)对每一$x,y,z\in C,\lim_{t\to 0}\varphi(tz+(1-t)x,y)\leq\varphi(x,y)$,

(A4)对每一$x\in C,y\to\varphi(x,y)$是凸的和下半连续的。

如果一个平衡问题满足(A1)-(A4),则列引理成立。

引理2.5[1] 设C是Hilbert空间中的一个非空闭凸子集,$\varphi:C\times C\in R$是一个二元函数,满足(A1)-(A4),则对任意r>0和$x\in H$,存在

$$z\in C,\varphi(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,z-y\rangle\geq 0,\forall y\in C.$$

引理2.6[4] 假设$\varphi:C\times C\to R$满足(A1)-(A4),则对于任意r>0和$x\in H$,定义一映像$T_r:H\to C$如下:

$$T_r(x)=\left\{z\in c:\varphi(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,z-x\rangle\geq 0,\forall y\in C\right\},\forall x\in H.$$

则有下式成立:

1)T_r是单值的;

2)T_r是强非扩张的,即$\|T_rx-T_ry\|\leq\langle T_rx-T_ry,x-y\rangle,\forall x,y\in H$;

3)$\varphi(T_r)$=EP(φ);

4)EP(φ)是闭凸的。

在证明本文的主要结果中,下面的引理将起到主要作用。

引理2.7[3] 设非负实数列{α_n}使得$\alpha_{n+1}\leq(1-t_n)\alpha_n+\beta_n$。其中$\{t_n\}\subset(0,1)$,序列{$\beta_n$}使得

(ⅰ)$\sum_{n=1}^{\infty}t_n=\infty$,

(ⅱ)$\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{t_n}\leq 0$ 或$\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|<\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

引理2.8[5] 令X是Banach空间,$\{x_n\}$,$\{y_n\}$是X中的有界序列,$\beta_n\subset[0,1]$满足

$0<\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n\leq\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_n<1$,

假设$x_{n+1}=\beta_nx_n+(1-\beta_n)y_n,\forall n\geq 1$,且$\limsup\limits_{n\to\infty}\{\|y_{n+1}-y_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|\}\leq 0$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-y_{n-1}\|=0$.

引理2.9[6] 设H是实的Hilbert空间。C是H中之一非空闭凸子集,$\{S_i:C\to C\}$是一无限族的非扩张映像,且$\bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i)\neq\varnothing$,$\{u_n\}$是一个使得$0<u_i\leq b<1$,∀i≥1的实数序列,如果K是C中任意一个有界子集,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in k}\|Wx-W_nx\|=0$.

3 主要结果

定理3.1 设H为实Hilbert空间,C为H的非空闭凸子集,φ:C×C→R是一二元函数满足条件(A1)–(A4)设A:C→H是一α–逆强单调映像,$\{S_i:C\to C\}$为非扩张映像可数族,$F:=\bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i)$,F∩VI(C,A)∩EP($\varphi$)≠Ø。f:H→H是压缩映像,压缩系数为h∈(0,1),B:H→H是$\dot{\gamma}$–强正有界线性算子,其中$0<\gamma<\frac{\dot{\gamma}}{h}$,定义如下序列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{k_n\}$,$\{u_n\}\subset[0,1]$:

$$\begin{cases}\varphi(u_n,y)+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geq 0,\forall y\in C\\ x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(w_nx_n)+\beta_nx_n+((1-\beta_n)I-\alpha_nB)W_nk_n\\ k_n=P_c(y_n-\lambda_nAy_n)\\ y_n=P_c(u_n-\lambda_nAu_n)\end{cases}\tag{3.1}$$

这里$\{W_n:C\to C\}$按定义(2.4){α_n},{β_n},$\{r_n\}\subset[0,1]$,{λ_n}⊂(0,2α),$\{r_n\}\subset[0,\infty]$,满足条件:

(ⅰ)$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$;(ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$;(ⅲ)$0<\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n\leq\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_n<1$;(ⅳ)$\liminf\limits_{n\to\infty}r_n>0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}|r_{n+1}-r_n|<\infty$;

(ⅴ)$\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_{n+1}-\lambda_n|=0$.

则$\{x_n\}$和$\{u_n\}$强收敛于$P_{F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)}(I-B+\gamma f)(z)$。

证明:下面将分六步来证明定理3.1。

第一步 证明存在z∈C,使得$z=P_{F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)}(I-B+\gamma f)(z)$。

根据条件(ⅲ),(ⅳ)假设$\alpha_n\leq(1-\beta_n)\|B\|^{-1}$,因为B:H→H,是线性有界自伴算子,则

$\|B\|=\sup\{|\langle Bu,u\rangle|:u\in H,\|u\|=1\}$显然$\langle((1-\beta_n)I-\alpha_nB)u,u\rangle\geq 1-\beta_n-\alpha_n\|B\|\geq 0$,即:

$$\|(1-\beta_n)I-\alpha_nB\|=\sup\{\langle((1-\beta_n)I-\alpha_nB)u,u\rangle:u\in H,\|u\|=1\}\leq 1-\beta_n-\alpha_n\dot{\gamma}\tag{3.2}$$

又因为f:H→H是压缩映像,其压缩系数为h∈(0,1),则对任意的x,y∈H,有:

$$\|P_{F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)}(I-B+\gamma f)(x)-P_{F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)}(I-B+\gamma f)(y)\|\leq$$

$$\|I-A\|\|x-y\|+\gamma\|f(x)-f(y)\|=\left(1-\left(\dot{\gamma}-\gamma h\right)\right)\|x-y\|$$

根据Banach定理,存在z∈C,使得$z=P_{F\cap VI(C,B)\cap EP(\varphi)}(I-B+\gamma f)(z)$。

第二步 证明$\{x_n\}$,$\{k_n\}$,$\{u_n\}$,$\{f(w_nx_n)\}$,$\{W_nk_n\}$有界

事实上,对任意的x,y∈C, $\lambda_n \in (0,2a)$有

$$\|(I-A\lambda_n)x-(I-A\lambda_n)y\|^2=\|x-y\|^2-2\lambda_n\langle x-y,Ax-Ay\rangle+\lambda_n^2\|Ax-Ay\|^2$$
$$\le\|x-y\|^2+\lambda_n(\lambda_n-2\alpha)\|Ax-Ay\|^2 \tag{3.3}$$

这意味着$I-\lambda_n A$是非扩张的,

$z\in F\bigcap VI(C,A)\bigcap EP(\varphi)$,则

$$\|k_n-z\|=\|P_c(x_n-\lambda_n Ay_n)-P_c(z-\lambda_n Az)\|$$
$$\le\|(x_n-\lambda_n Ay_n)-(z-\lambda_n Az)\|$$
$$=\|(x_n-z)-\lambda_n A(y_n-z)\|=\|(xn-z)-\lambda_n A[P_c(x_n-\lambda_n Ay_n)-P_c(z-\lambda_n Az)]\| \tag{3.4}$$
$$\le\|(x_n-z)-\lambda_n A(x_n-z)\|\le\|(x_n-z)\|$$

由$z=W_nz$,得

$$\|x_{n+1}-z\|=\|\alpha_n(\gamma f(w_nx_n)-Bz)+\beta_n(x_n-z)+((1-\beta_n)I-\alpha_nB)(W_nk_n-z)\|$$
$$\le\left(1-\beta_n-\alpha_n\dot{\gamma}\right)\|k_n-z\|+\beta_n\|x_n-z\|+\alpha_n\|\gamma f(w_nx_n)-Bz\|$$
$$\le\left(1-\alpha_n\left(\dot{\gamma}-\gamma h\right)\right)\|x_n-z\|+\alpha_n\|\gamma f(z)-Bz\|$$

由归纳法,得

$$\|x_n-z\|\le\max\left\{\|x_0-z\|,\frac{\|\gamma f(z)-Bz\|}{\dot{\gamma}-\gamma h}\right\},n\ge0.$$

因此$\{x_n\}$是有界的。从而,$\{y_n\}$,$\{u_n\}$,$\{k_n\}$,$\{W_nk_n\}$,$\{f(w_nx_n)\}$是有界的。

第三步 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$

$$\|k_{n+1}-k_n\|=\|P_c(y_{n+1}-\lambda_{n+1}Ay_{n+1})-P_c(y_n-\lambda_nAy_n)\|\le\|y_{n+1}-y_n\|+|\lambda_n-\lambda_{n+1}|\|Ay_n\|$$
$$\le\|u_{n+1}-u_n\|+|\lambda_n-\lambda_{n+1}|(\|Ay_n\|+\|Au_n\|) \tag{3.5}$$

根据引理2.5令$u_n=T_{r_n}x_n,u_{n+1}=T_{r_{n+1}}x_{n+1}$得到

$$\varphi(u_{n+1},y)+\frac{1}{r_{n+1}}\langle y-u_{n+1},u_{n+1}-x_{n+1}\rangle\ge0,\forall y\in C \tag{3.6}$$
$$\varphi(u_n,y)+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\ge0,\forall y\in C \tag{3.7}$$

在(3.6)中取$y=u_{n+1}$和在(3.7)中取$y=u_n$得到

$$\varphi(u_{n+1},u_n)+\frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n-u_{n+1},u_{n+1}-x_{n+1}\rangle\ge0,\forall y\in C$$
$$\varphi(u_n,u_{n+1})+\frac{1}{r_n}\langle u_{n+1}-u_n,u_n-x_n\rangle\ge0,\forall y\in C$$

把上面两式相加,利用条件(A2)有$\left\langle u_{n+1}-x_n,\frac{u_n-x_n}{r_n}-\frac{u_{n+1}-x_{n+1}}{r_{n+1}}\right\rangle\ge0$

于是有

$$\|x_{n+1}-u_n\|^2\le\|u_{n+1}-u_n\|\left\{\|x_{n+1}-x_n\|+\left|1-\frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|\right\}$$

根据条件(ⅳ),不妨假设$r_n>c$,$\forall n\geqslant1$得到

$$\|x_{n+1}-u_n\|\le\|x_{n+1}-x_n\|+\left|1-\frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|\le\|x_{n+1}-x_n\|+\sup_{n\ge1}\{\|u_n-x_n\|\}\frac{1}{c}|r_{n+1}-r_n|$$
$$+|\lambda_n-\lambda_{n+1}|(\|Ay_n\|+\|Au_n\|) \tag{3.8}$$

把(3.8)代入(3.5)得到

$$\|k_{n+1}-k_n\|\le\|x_{n+1}-x_n\|+\sup_{n\ge1}\{\|u_n-x_n\|\}\frac{1}{c}|r_{n+1}-r_n|$$

令$x_n+1=(1-\beta_n)z_n+\beta_nx_n,\forall n\ge1$,则有

$$\|z_{n+1}-z_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|=\left\|\frac{x_{n+2}-\beta_{n+1}x_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}-\frac{x_{n+1}-\beta_n x_n}{1-\beta_n}\right\|-\|x_{n+1}-x_n\|$$

$$=\left\|\frac{\alpha_{n+1}\gamma f(w_{n+1}x_{n+1})+((1-\beta_{n+1})I-\alpha_{n+1}B)W_{n+1}k_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}-\frac{\alpha_n\gamma f(w_nx_n)+((1-\beta_n)I-\alpha_nB)W_nk_n}{1-\beta_n}\right\|$$

$$-\|x_{n+1}-x_n\|\le\frac{\alpha_{n+1}}{1-\beta_{n+1}}\left(\|\gamma f(w_{n+1}x_{n+1})\|+\|BW_{n+1}k_{n+1}\|\right)+$$

$$\frac{\alpha_n}{1-\beta_n}\left(\|\gamma f(w_nx_n)\|+\|BW_nk_n\|\right)+\|W_{n+1}k_n-W_nk_n\|+\|u_{n+1}-u_n\|-\|x_{n+1}-x_n\| \tag{3.9}$$

其中:$\|W_{n+1}k_n-W_nk_n\|\le\|W_{n+1}k_n-Wk_n\|+\|Wk_n-W_nk_n\|\le\sup_{x\in k}\{\|Wx-W_{n+1}x\|+\|Wx-W_nx\|\}$

因为H有界以及K⊂C,根据引理2.9,有

$\lim_{n\to\infty}\|W_{n+1}k_n-W_nk_n\|=0$

把(3.8)代入(3.9),有 $\limsup_{n\to\infty}(\|z_{n+1}-z_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|)\le 0$

根据引理2.8知 $\lim_{n\to\infty}\|z_n-x_n\|=0$。另 $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=\lim_{n\to\infty}(1-\beta_n)\|z_n-x_n\|=0$

所以,由(3.8)和条件(ⅳ)有

$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$

第四步 证明 $\|W_nk_n-k_n\|\to 0,\|u_n-x_n\|\to 0.$

首先证明 $\|W_nk_n-k_n\|\le\|W_nk_n-x_n\|+\|x_n-u_n\|+\|u_n-k_n\|$

因此,只需证明 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0,\lim_{n\to\infty}\|u_n-k_n\|=0$

(a)证明 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0$

事实上,利用引理2.6 $\forall v\in F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)$,有

$$\|u_n-v\|=\|T_{r_n}x_n-T_{r_n}v\|$$

$$\le\langle T_{r_n}x_n-T_{r_n}v,x_n-v\rangle=\langle u_n-v,x_n-v\rangle \tag{3.10}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\|u_n-v\|^2+\|x_n-v\|^2-\|u_n-x_n\|^2\right)$$

利用(3.4)和(3.10),有

$$\|x_{n+1}-v\|^2=\|\alpha_n(\gamma f(w_nx_n)-Bv)+\beta_n(x_n-W_nk_n)+(1-\alpha_n)(W_nk_n-v)\|^2$$

$$\le\|\beta_n(x_n-W_nk_n)+(1-\alpha_n)(W_nk_n-v)\|^2+2\alpha_n\langle\gamma f(w_nx_n)-Bv,x_{n+1}-v\rangle$$

$$\le\left(1-\alpha_n\dot{\gamma}\right)^2\|x_n-v\|^2-\left(1-\alpha_n\dot{\gamma}\right)^2\|u_n-x_n\|^2+\beta_n{}^2(x_n-W_nk_n)^2+$$

$$2\alpha_n\|\gamma f(w_nx_n)-Bv\|\|x_{n+1}-v\|+2\left(1-\alpha_n\dot{\gamma}\right)\beta_n\|k_n-v\|\|x_n-W_nk_n\|\left(1-\alpha_n\dot{\gamma}\right)^2\|u_n-x_n\|^2 \tag{3.11}$$

$$\le(\|x_n-v\|+\|x_{n+1}-v\|)\|x_{n+1}-x_n\|+\beta_n{}^2\|x_n-W_nk_n\|^2+\left(\left(\alpha_n\dot{\gamma}\right)^2-2\alpha_n\dot{\gamma}\right)\|u_n-v\|^2+$$

$$2\alpha_n\|\gamma f(w_nx_n)-Bv\|\|x_{n+1}-v\|+2\left(1-\alpha_n\dot{\gamma}\right)\beta_n\|k_n-v\|\|x_n-W_nk_n\|$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0$

(b)证明 $\lim_{n\to\infty}\|u_n-k_n\|=0$

$$\|y_n-x\|^2\le\|(1-\lambda_nA)u_n-(1-\lambda_nA)v\|^2\le\|u_n-v\|^2+\lambda_n(\lambda_n-2\alpha)\|Au_n-Av\|^2\le \tag{3.12}$$

$$\|x_n-v\|^2+a(b-2\alpha)\|Au_n-Av\|^2$$

把(3.12)代入(3.11),利用 $\|k_n-v\|^2\le\|y_n-v\|^2$ 有

$$\|x_{n+1}-v\|^2\le\left(1-\alpha_n\dot{\gamma}\right)^2\|x_n-v\|^2a(b-2\alpha)\|Au_n-Av\|^2+\beta_n^2\|x_n-W_nk_n\|^2+$$

$$2\alpha_n\|\gamma f(w_nx_n)-Bv\|\|x_{n+1}-v\|-2\left(1-\alpha_n\dot{\gamma}\right)\beta_n\|k_n-v\|\|x_n-W_nk_n\|\left(1-\alpha_n\dot{\gamma}\right)^2a(b-2\alpha)\|Au_n-Av\|^2$$

$$\le \left(\|x_n - v\| + \|x_{n+1} - v\|\right)\|x_{n+1} - x_n\| + \left[\left(\alpha_n \dot{\gamma}\right)^2 - 2\alpha_n \dot{\gamma}\right]\|x_n - v\|^2 + \beta_n^2\|x_n - W_n k_n\|^2 +$$

$$2\alpha_n\|\gamma f(w_n x_n) - Bv\|\|x_{n+1} - v\| - 2\left(1 - \alpha_n \dot{\gamma}\right)\beta_n\|k_n - v\|\|x_n - W_n k_n\| \tag{3.13}$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\|Au_n - Av\| = 0$

另

$$\|y_n - v\|^2 = \|P_c(u_n - \lambda_n Au_n) - P_c(v - \lambda_n Av)\|^2$$
$$\le \langle (u_n - \lambda_n Au_n) - (v - \lambda_n Av), y_n - v\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\|(u_n - \lambda_n Au_n) - (v - \lambda_n Av)\|^2 + |y_n - v|^2 - \|(u_n - \lambda_n A u_n) - (v - \lambda_n Av) - (y_n - v)\|^2\right\}$$
$$\le \frac{1}{2}\left\{\|u_n - v\|^2 + \|(y_n - v)\|^2 + \|u_n - y_n\|^2 + 2\lambda_n\langle u_n - y_n, Au_n - Av_n\rangle - \lambda_n^2\|Au_n - Av\|^2\right\}$$

把(3.13)代入(3.12)化简得

$$\|x_{n+1} - v\|^2 \le \left(1 - \alpha_n \dot{\gamma}\right)^2\left\{\|x_n - v\|^2 + \|u_n - y_n\|^2 2\lambda_n\langle u_n - y_n, Bu_n - Bv\rangle - \lambda_n^2\|Bu_n - Bv\|^2\right\}$$

$$+ \beta_n^2\|x_n - W_n k_n\|^2 + 2\left(1 - \alpha_n \dot{\gamma}\right)\beta_n\|k_n - v\|^2\|x_n - W_n k_n\| + 2\alpha_n\|\gamma f(w_n x_n) - Av\|\|x_{n+1} - v\|$$

即 $\lim_{n\to\infty}\|k_n - y_n\| = 0$

因为 $\|k_n - y_n\|^2 = \|P_c(y_n - \lambda_n Ay_n) - P_c(u_n - \lambda_n Au_n)\| \le \|y_n - u_n\|$,得到

$\|k_n - u_n\| \le \|k_n - y_n\| + \|y_n - u_n\| \le 2\|y_n - u_n\| \to 0(n \to \infty)$

第五步 证明 $\lim_{n\to\infty}\sup\langle (B - rf)z, z - x_n\rangle \le 0$, 其中 $z = P_{F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)}(I - B + \gamma f)(z)$。

取$\{k_{ni}\}\subset\{k_n\}$使得 $\lim_{n\to\infty}\sup[(B - \gamma f)z, z - W_n k_n] = \lim_{i\to\infty}[(B - \gamma f)z, z - W_{n_i}k_{n_i}]$

因$\{k_n\}$有,故存在子序列 k_{n_i} 弱收敛于k,因 $\|W_{n_i}k_{n_i} - k_{n_i}\| \to 0$.故 $W_{n_i}k_{n_i}$ 弱收敛于k。

(a)证明 $k \in EP(\varphi)$

因 $u_n = T_{r_n}x_n$ 有 $\varphi(u_n, y) + \frac{1}{r_n}[y - u_n, u_n - x_n] \ge 0, \forall y \in c$

根据条件(A2),有

$\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \ge \varphi(y, u_n)$,

所以 $\left\langle y - u_{n_i}, \frac{u_{n_i} - x_{n_i}}{r_{n_i}}\right\rangle \ge \varphi(y, u_n)$.

另一方面, $\|u_n - k_n\| \le \|u_n - x_n\| + \|x_n - k_n\| \to 0$,

因 k_{n_i} 和 u_{n_i} 弱收敛于k,利用条件(A4),有 $\varphi(y,k)\le 0$, $\forall y\in C$,对任意 $0<t\le 1$,令 $y_t=ty+(1-t)k$,则 $y_t\in C$,利用条件(A4),有

因为 $y\in C$ 和利用条件(A4),有

$0 = F(y_t, y_t) \le tF(y_t, y) + (1-t)F(y_t, k) \le tF(y_t, y)$

这意味着 $\varphi(y_t, y)\ge 0$。因此,根据(A4),有 $F(z,y)\ge 0$ 对任意 $y\in C$ 有 $z\in EP(\varphi)$。

(b)证明 $k \in F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(S_n)$。否则,有 $Wk\ne k$。因为 k_{n_i} 弱收敛于k,利用Opial's条件,

有 $\lim_{i\to\infty}\inf\|k_{n_i} - k\| < \lim_{i\to\infty}\inf\left\{\|k_{n_i} - Wk_{n_i}\| + \|Wk_{n_i} - Wk\|\right\} = \lim_{i\to\infty}\inf\left\{\|k_{n_i} - Wk_{n_i}\| + \|k_{n_i} - k\|\right\}$

根据引理2.9,有 $\lim_{i\to\infty}\|Wk_{n_i} - k_{n_i}\| \le \lim_{i\to\infty}\left\{\|Wk_{n_i} - W_{n_i}k_{n_i}\| + \|W_{n_i}k_{n_i} - k_{n_i}\|\right\} = 0$

因此,有 $\lim_{i\to\infty}\inf\|k_{n_i} - k\| < \lim_{i\to\infty}\inf\|k_{n_i} - k\|$。矛盾,从而 $z \in F(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty}F(S_n)$

(c)证明 $k\in VI(C,A)$。利用定义2.2,对任意 $(x,u)\in G(T)$, $u-Ax\in N_c x$,因为 $k_n\in C$,有 $\langle x-k_n, u-Ax\rangle\ge 0$ 又 $k_n=P_c(y_n-\lambda Ay_n)$

因此,有$\langle x-k_n, k_n-(y-\lambda_n Ay_n)\rangle \geqslant 0$,

所以 $\left\langle x-k_n, \dfrac{k_n-\lambda_n}{\lambda_n}+Ay_n\right\rangle \ge 0$

因$\|k_n-y_n\|\to 0$, k_{n_i}强收敛于k,A是Lipschitz连续的,所以有$\lim\limits_{i\to\infty}\langle x-k_n,u\rangle=\langle x-k,u\rangle\ge 0$

因为T是极大单调的,$0\in Tk$,根据定义2.2有$k\in VI(C,A)$。

第六步 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=z$

$$\|x_{n+1}-z\|^2=\|\alpha_n(\gamma f(w_n x_n)-Bz)+\beta_n(x_n-z)+((1-\beta_n)I-\alpha B)(W_n k_n-z)\|^2$$

$$\le|\beta_n(x_n-z)+((1-\beta_n)I-\alpha B)(W_n k_n-z)|^2+2\alpha_n\langle\gamma f(w_n x_n)-Az,x_{n+1}-z\rangle$$

$$\le\left(1-\beta_n-\alpha_n\dot{\gamma}\right)\|k_n-z\|+\beta_n\|x_n-z\|^2+2\alpha_n\gamma h\|x_n-z\|\|x_{n+1}-z|+2\alpha_n\langle\gamma f(w_n x_n)-Bz,x_{n+1}-z\rangle$$

$$\le\left(1-\alpha_n\dot{\gamma}\right)^2\|x_n-z\|+\alpha_n\gamma h\left\{|x_n-z|^2+\|x_{n+1}-z\|^2\right\}+2\alpha_n[\gamma f(w_n x_n)-Bz,x_{n+1}-z]$$

$$\le\left[1-\frac{2\alpha_n\left(\dot{\gamma}-\gamma h\right)}{\alpha_n\gamma h}\right]\|x_n-z\|^2+\frac{2\alpha_n\left(\dot{\gamma}-\gamma h\right)}{\alpha_n\gamma h}\times\left\{\frac{\alpha_n\gamma\sup\left\{\|x_n-z\|^2:n\ge 1\right\}}{2\left(\dot{\gamma}-\gamma h\right)}+\frac{1}{\dot{\gamma}-\gamma h}\langle\gamma f(w_n z)-Bz,x_{n+1}-z\rangle\right\}$$

由引理2.7有$\{x_n\}$和$\{u_n\}$强收敛于$P_{F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)}(I-B+\gamma f)(z)$。这就完成了定理3.1的证明。

注:1 当B=I,定理3.1为文献[7]中的定理3.1

定理3.2 设H为实Hilbert空间,C为H的非空闭凸子集,$\varphi:C\times C\to R$是一二元函数满足条件(A1)–(A4),设$A:C\to H$是一α–逆强单调映像,$\{S_i:C\to C\}$为非扩张映像可数族,$F:=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(S_i)$,$F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)\neq\varnothing$。$f:H\to H$是压缩映像,其压缩系数为$h\in(0,1)$,$B:H\to H$是$\dot{\gamma}$–强正有界线性算子,其中$0<\gamma<\dfrac{\dot{\gamma}}{h}$,定义如下序列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{k_n\}$:

$$\begin{cases}x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(w_n x_n)+\beta_n x_n+((1-\beta_n)I-\alpha_n B)W_n k_n\\ k_n=P_C(y_n-\lambda_n Ay_n),\\ y_n=P_C[(I-\lambda_n Au_n)P_C x_n],\end{cases}\tag{3.14}$$

这里$\{W_n:C\to C\}$,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{r_n\}$和$\{\lambda_n\}$满足定理3.1的条件:则$\{x_n\}$强收敛于$P_{F\cap VI(C,A)}(I-B+\gamma f)(z)$。

证明:在定理3.1取$\varphi(x,y)\equiv 0$, $\forall x,y\in C$,和$((1-\beta_n)I)-\alpha_n B=1$,有$u_n=P_C x_n$,于是由定理3.1知定理3.2的结果成立。

注:2 当B=I,定理3.2为文献[7]中的定理3.2

定理3.3 设H为实Hilbert空间,C为H的非空闭凸子集,$\varphi:C\times C\to R$是一二元函数满足条件(A1)–(A4),设$A:C\to H$是一α–逆强单调映像,$\{S_i:C\to C\}$为非扩张映像可数族,$F:=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(S_i)$,$F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)\neq\varnothing$。$f:H\to H$是压缩映像,压缩系数为$h\in(0,1)$,$B:H\to H$是$\dot{\gamma}$–强正有界线性算子,其中$0<\gamma<\dfrac{\dot{\gamma}}{h}$,定义如下序列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{k_n\}$,$\{u_n\}\subset[0,1]$:

$$\begin{cases}\varphi(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\ge 0,\forall y\in C,n\ge 1\\ x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(w_n x_n)+\beta_n x_n+((1-\beta_n)I-\alpha_n B)W_n k_n,\ \ n\ge 1\end{cases}\tag{3.15}$$

这里$\{W_n:C\to C\}$,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$,$\{r_n\}$满足定理3.1的条件:则$\{x_n\}$和$\{u_n\}$:强收敛于$P_{F\cap EP(\varphi)}(I-B+\gamma f)(z)$。

证明:在定理3.1中取A=0,则$y_n=k_n=u_n$,由定理3.1即得定理3.3的结果。

注:3 当B=I,定理3.3为文献[7]中的定理3.3

4 应用

4.1 对最优化问题的应用

在本节中我们讨论下面的最优化问题:

$$\min_{x\in C}h(x)\tag{4.,1}$$

其中C是Hilbert空间H中之一非空闭凸集，$h:C\to R$是一凸的下半连续泛函，记(4.1)的解集为S，设$\varphi:C\times C\to R$是由下式定义的映像：

$\varphi(x,y)=h(y)-h(x)$。

现在考虑下面的平衡问题，即求$x\in C$，使得

$$\varphi(x,y)\geqslant 0,\ \forall y\in C。\tag{4.2}$$

易知φ满足条件(A1)–(A4)，且$S=EP(\varphi)$，其中$EP(\varphi)$是平衡问题(4.2)的解集。于是由定理3.3可以得到下面定理：

定理 4.1　对给定的$x_1\in C$定义序列$\{x_n\}$，$\{u_n\}$：

$$\begin{cases} h(x)-h(y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geq 0,\forall y\in C \\ x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(w_nx_n)+\beta_nx_n+((1-\beta_n)I-\alpha_nB)W_nk_n \end{cases}\tag{4.3}$$

如果满足下列条件：

(ⅰ) $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$；　(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

(ⅲ) $0<\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n\leq\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_n<1$;　(ⅳ) $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n>0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}|r_{n+1}-r_n|<\infty$;

则序列$\{x_n\}$强收敛于最优化问题(4.1)的解$P_S(I-B+\gamma f)(z)$

证明：取$S_i=I$，$\forall_i\geqslant 1$，则$W_n=1$，$\forall n\geqslant 1$，故由定理3.3知结论成立。

4.2 对非扩张映像可数族和严格伪压缩映像的强收敛性问题的应用

定义4.2　映像$T:C\to C$称为k–严格伪压缩的，如果存在$k\in[0,1)$使得

$$\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|+k\|(I-T)x-(I-T)y\|^2,\forall(x,y)\in C$$

设$T:C\to C$是一k–严格伪压缩映像，则映像$A=I-T:C\to H$是一$\dfrac{1-k}{2}$–逆强单调映像[7]。

定理 4.3　设H为实Hilbert空间，C为H的非空闭凸子集，$\varphi:C\times C\to R$是一二元函数满足条件(A1)–(A4)设$A:C\to H$是一α–逆强单调映像，$\{S_i:C\to C\}$为非扩张映像可数族$F:=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F(S_i)$，$F\cap VI(C,A)\cap EP(\varphi)\neq\varnothing$。$f:H\to H$是压缩映像，压缩系数为$h\in(0,1)$，$B:H\to H$是$\dot{\gamma}$–强正有界线性算子，其中$0<\gamma<\dfrac{\dot{\gamma}}{h}$，定义如下序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{k_n\}$，$\{u_n\}\subset[0,1]$：

$$\begin{cases} \varphi(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\geq 0,\forall y\in C \\ x_{n+1}=\alpha_n\gamma f(w_nx_n)+\beta_nx_n+((1-\beta_n)I-\alpha_nB)W_nk_n \quad \forall n\geq 1 \\ k_n=(1-\lambda_n)y_n+\lambda_nTy_n \\ y_n=(1-\lambda_n)u_n+\lambda_nTu_n \end{cases}\tag{4.6}$$

这里$\{W_n:C\to C\}$与定理(3.1)中的相同，$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{\gamma_n\}$是[0,1]中的序列，$\{\lambda_n\}$是[a,b]中的序列，其中$\{\lambda_n\}\subset(0,1-k]$，而$\{r_n\}\subset[0,\infty]$中的序列，如果满足下列条件：

(ⅰ) $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1$；　(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$;　(ⅲ) $0<\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n\leq\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_n<1$;

(ⅳ) $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n>0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}|r_{n+1}-r_n|<\infty$;　(ⅴ) $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_{n+1}-\lambda_n|=0.$

则$\{x_n\}$和$\{u_n\}$强收敛于$z\in\bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i)\cap F(T)\cap EP(\varphi)$。

其中$z=P_{F\cap F(T)\cap EP(\varphi)}(I-B+\gamma f)(z)$。而$F:=\bigcap_{i=1}^{\infty}F(S_i)$

证明：由映像$A=I-T:C\to H$是一$\dfrac{1-k}{2}$–逆强单调映像[7]，知$F(T)=VI(C,A)$，而且

$$y_n=P_C(u_n-Au_n)=P_C((1-\lambda_n)u_n+\lambda_nTu_n)=(1-\lambda_n)u_n+\lambda_nTu_n\in C$$

$$k_n=P_C(y_n-Ay_n)=P_C((1-\lambda_n)y_n+\lambda_nTy_n)=(1-\lambda_n)y_n+\lambda_nTy_n\in C$$

由定理3.1知结论成立。

注：3 定理4.3为文献[7]中的定理4.3的改进和推广。

注释及参考文献:

[1]Rockafellar R T.On the maximality of sums of nonlinear monotone operators.[J].Trans Amer Math Soc.1970,149:75-88.

[2]Rockafellar R T.Monotone operators and proximal point algorithm.[J].SIAMJ Control Pptim.1976,14:877-898.

[3]Xu H K.Iterative algorithm for nonlinear monotone operators[J].London.Math.Soc,2002,66:240-256.

[4]Flam S D,Antipin A S.Equilibrium programming using proximal-like algorithms.[J].Math.Program,1997,78:29-41.

[5]ZHANG S S,RAO R F,HUNG J L.Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and a k-strict pseudocontraction in Hilbert space.[J].Appl.Math.Mech,2009,30(6):685-694.

[6]LIU M,ZHANG S S.A New iterative method for finding common solutions of Generalized Equilibrium Problem,Fixed Point Problem Of Infinite k-strict Pseudo-contractive mappings and quasi-variational inclusion problem.[J].Acta Mathematica Scientia.2012,32B(2):499-519.

[7]ZHANG S S,Joseph Lee H W,Chi Kin Chan.A new method for solving equilibrium problem fixed point problem and variational inequalitiy problem with application to optimization[J].Nonlinear Analysis,2009,70(9):3307-3319.

[8]GAO X H,ZHOU H Y.Strong convergence theorem of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert space[J].Acta Mathematicae Applicatae Sinica,English Series.2012,28:337-350.

[9]E.Blum,S.Oettli,From optimization and variational inequalities to equilibrium problems,Math.Student.1994,63:1-4:123-145.

[10]ZHANG S S,Y.J.Cho,J.K.Kim,Approximation methods of solutions for equilibrium problem in Hilbert spaces,Dynam. Systems Appl.(in print).

[11]H.Iiduka,W.Takahashi,Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings,Nonlinear Anal.2005,61:341-350.

[12]S.Plubtieng,R.Punpaeng,A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of nonlinear mappings and monotone mappings,Appl.Math.Comput.2007,doi:10.1016/j.amc.2007.07.075.

[13]Y.F.Su,M.J.Shang,X.L.Qin,An iterative method of solution for equilibrium and optimization problems,Nonlinear Anal. 2007.doi:10.1016/j.na.2007.08.045.

[14]S.Takahashi,W.Takahashi,Viscosity approximation methods for equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert spaces,J.Math.Anal.Appl.2006,331:506-515.

[15]W.Takahashi,M.Toyoda,Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings,J.Optim. Theory Appl.2003,118:417-428.

[16]Y.Y.Yao,J.C.Yao,On modified iterative method for nonexpansive mappings and monoton Y.Y.Yao,J.C.Yao,On modified iterative method for nonexpansive mappings and monoton e mappings,Appl.Math.Comput.2007,186(2):1551-1558.

Strong Convergence Theorem of Some Equilibrium Problems Variational Inequalities Problems and Fixed Point Problems and the Application to Optimization in Hilbert Space

FENG Ren-yong,HE Zhong-quan

(School of Mathematics and Information,China West Normal University,Nanchong,Sichuan 637002)

Abstract: In this paper,a new iterative algorithm is introduced in Hilbert space. A strong convergence theorem of equilibrium problems variational inequalities problem and fixed point problems is obtained. The result presented improve and extend the recent corresponding announced by many others.

Key words: Equilibrium problem; Fixed point; Hilbert space; a - Inverse strongly monotone mappings; Iterative algorithm