从RLC串联电路的分析浅谈系统分析方法

刘显奎,方志聪
(西昌学院,四川 西昌 615013)

【摘 要】通过对RLC二阶系统基本分析方法的比较,阐明不同系统分析方法之间的区别和联系,其思路和方法在系统分析中具有一定的普适性。

【关键词】动态;二阶系统;分析方法
【中图分类号】TN911.6 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2012)04-0031-02

对于大量的动态系统,由于有记忆元件的存在,所列出的方程为线性微分方程,求解系统线性微分方程虽为数学问题,却是工科类专业不能忽视的问题。本文以最常见的RLC串联电路为例,讨论了常见的二阶系统的几种分析方法。

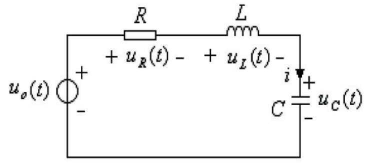

图1

如图1所示电路,元件参数已知,$u_0(t)$为激励,$u_C(t)$为响应。对于这样一个问题,其微分方程可以用时域分析、频域分析或复频域分析方法进行处理。还可根据有关电路定理(如向量法)求解[1-3]。

本文所给系统简单,但它及其微分方程却具一定代表性,它往往是众多复杂系统的一个基础,同时其分析方法是具有普适性的。

1 系统的数学模型

系统数学模型的建立是基于基本物理原理建立起来的,是系统分析中的基本功,应强化对学生的训练。对于如图1的RLC电路由基尔霍夫电压定律(KVL)和各元件伏安关系(VAR),有[1,2]

VAR:

$$i=C\frac{du_C}{dt},\quad u_R=Ri=RC\frac{du_C}{dt},$$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

KVL: $u_L+u_R+u_C=u_O(t)$

$$\therefore\quad LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=u_O(t)$$

为简便起见,令 $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$, $2\beta=\frac{R}{L}$,则方程可改写为

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\beta\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=\omega_0^2u_O(t) \qquad (1)$$

为求得该二阶微分方程的解,还需给出初始条件$u_C(0_+)$和$u_C'(0_+)$[$u_C'(0_+)=\frac{i(0_+)}{C}$]。通常情况下初始条件由起始状态$u_C(0_-)$和$u_C'(0_-)$ [$u_C'(0_-)=\frac{i(0_-)}{C}$]结合激励$u_0(t)$给出。

2 时域经典解法

时域经典解法可以从两个角度去进行分析,一是方程(1)的齐次解加上特解构成方程的通解;一是方程(1)的通解由零输入响应和零状态响应组成,即$u_C(t)=u_{Czi}(t)+u_{Czs}(t)$ 。当然其最后结果是相同的,本文以第二种角度进行分析。

以最常见和实用的$\beta<\omega_0$(即$R<2\sqrt{L/C}$)为例,方程(1)的特征根为一对共轭复数,$\lambda_{1,2}=-\beta\pm j\omega$,其中$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$,零输入和零状态解分别为。

$$u_{Czi}(t)=A_{zi}e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_{zi}) \qquad (2)$$

$$u_{Czs}(t)=A_{zs}e^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi_{zs})+u_p(t) \qquad (3)$$

式中$u_p(t)$为方程(1)的特解。全响应为

$$u_C(t)=u_{Czi}(t)+u_{Czs}(t)=Ae^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi)+u_p(t) \qquad (4)$$

反应系统特征的冲激响应为

$$h(t)=\frac{\omega_0^2}{\omega}e^{-\beta t}\sin\omega t\varepsilon(t) \qquad (5)$$

式(4)中第一项为自由响应,第二项为强迫响应。以上三式中式(2)的系数A_{zi}、φ_{zi}由$u_C(0_-)$和$u_C'(0_-)$决定。式(3)的系数A_{zs}、φ_{zs}由$u_{Czs}(0_+)$和$u_{Czs}'(0_+)$决定,二者由方程与激励具体形式确定。式(4)的系数A、φ由初始状态$u_C(0_+)$,$u_C'(0_+)$确定。而[1,2]

$$\begin{aligned}u_C(0_+)&=u_{Czi}(0_+)+u_{Czs}(0_+)\\&=u_{Czi}(0_-)+u_{Czs}(0_+)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_C'(0_+)&=u_{Czi}'(0_+)+u_{Czs}'(0_+)\\&=u_{Czi}'(0_-)+u_{Czs}'(0_+)\end{aligned}$$ 。

收稿日期:2012-10-05
作者简介:刘显奎(1970-),男,讲师,主要从事理论物理、电路教学与研究。

3 频域分析法

令 $u_C(t) \leftrightarrow U_C(j\omega)$，$u_O(t) \leftrightarrow U_O(j\omega)$，对方程(1)取傅里叶变换，得

$$(j\omega)^2 U_C(j\omega) + 2\beta j\omega U_C(j\omega) + \omega_0^2 U_C(j\omega) = \omega_0^2 U_O(j\omega) \tag{6}$$

其频率响应函数

$$H(j\omega) = \frac{U_C(j\omega)}{U_O(j\omega)} = \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\beta j\omega + \omega_0^2} \tag{7}$$

根据该式可以讨论二阶电路(如滤波器等)的幅频 $|H(j\omega)|$、相频 $\varphi(\omega)$ 特性，用以指导具体的系统设计[2,3]。而系统响应频谱函数为

$$U_C(j\omega) = \frac{\omega_0^2 U_O(j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\beta j\omega + \omega_0^2} \tag{8}$$

理论上将具体的激励频谱函数 $U_O(j\omega)$ 带入即可求得系统响应的频谱函数 $U_C(j\omega)$，反演后既得系统的响应。但数学上求式(8)的傅里叶逆变换较为繁琐。另一方面，在频域分析中，信号的定义域为 $(-\infty,\infty)$，而在 $t=-\infty$ 总可以认为系统的状态为零，即频域分析中的响应总是指零状态响应，无法考虑系统的初始状态。而下面的复频域分析方法可以克服这些困难。

4 复频域分析法

式(1)的拉普拉斯变换为

$$U_C(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\beta + \omega_0^2} U_O(s) + \frac{su_C(0_-) + u_C'(0_-) + 2\beta u_C(0_-)}{s^2 + 2\beta + \omega_0^2} \tag{9}$$

上式右边两项物理意义明确，其第一项为零状态响应的拉氏变换，而第二项为零输入响应拉氏变换。而反应系统特征的系统函数为

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\beta s + \omega_0^2}$$

即 $$H(s) = \frac{\omega_0^2}{(s+\beta)^2 + \omega_0^2 - \beta^2} \tag{10}$$

当 $\beta < \omega_0$ 时，其逆变换即为系统冲激响应式(5)。

将系统起始状态代入式(9)，并经过拉普拉斯逆变换，可直接得到考虑了起始条件的系统的全响应，这也是s域分析方法的优点。

5 小结

事实上，RLC并联、串并联构成的二阶电路，根据对偶原理，均可表示为式(1)的数学模型，只是式中的 β 应根据具体系统确定，如RLC并联时 $\beta = \dfrac{G}{2C}$。因而本文所讨论的二阶系统数学模型及其分析方法具有一定的普适性。

从前文可以看出，时域分析方法具有物理过程和意义明显的特点，对于理解系统的物理意义较为有利。但对于较为复杂的系统，其微分方程求解较为繁琐。

而频域分析方法由于定义在 $(-\infty,\infty)$ 区间，在处理起始条件以及反演上存在一定困难。但频域模型在系统(如滤波器等)设计上就判断系统的幅频、相频特性及其物理可实现上具有较好优势，因而有利于指导系统设计。

复频域分析方法，将微分方程求解化为s域代数方程求解，且系统起始条件也包含在方程中，利用拉普拉斯逆变换及其逆变换性质，可较方便地直接求出系统全响应，求解简单明了，物理意义明确。另外复频域分析方法还可克服一些重要信号(如指数增长信号 $e^{\alpha t}\varepsilon(t)$)不存在傅里叶变换的困难。

让学生明白各种分析方法的优缺点，有助于系统全面地掌握各类系统分析方法，从而在针对不同的系统分析和设计中选择恰当的分析方法，以提高分析设计效率。

注释及参考文献：

[1]邱关源.电路(第五版)[M].北京:高等教育出版社,2006.5.

[2]吴大正.信号与线性系统分析(第四版)[M]. 北京:高等教育出版社,2005.8.

[3]Edward W.Kamen Bonnie S.Heck著,高强等译.信号与系统基础教程(第三版)[M].北京:电子工业出版社,2007.4.

A Study of Analytical Methods of Systems from Analysing to a RLC Circuit

LIU Xian-kui, FANG Zhi-cong

(Xichang College, Xichang, Sichuan 615013)

Abstract: By comparing the basic analytical methods of RLC's second-order system, the paper expounds the differences and connections among these methods. The train of thought and method also have a certain applicability in system analysis.

Key words: Dynamic; Second-order system; Analytical method