第26卷第3期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.26,NO.3
2012年09月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Sep.,2012

论形式系统的多样性

王太忠
(昭通学院 中文系,云南 昭通 657000)

【摘 要】形式系统在类型上包括公理系统和自然推理系统,在构成要件上包括的形式语言和演绎装置。构造者的哲学背景、构造形式系统的理论对象和目的不同,所采用的形式语言和演绎装置就可能不同,因而,构造出来的形式系统就多种多样,在不同的系统内证明同一个定理也表现为不同的公式系列。形式系统的形式语言和演绎装置为我们界定了形式证明的工具、出发点和依据,同时语义也包含了构造者构造形式系统的理论对象和目的,离开具体的形式系统去谈论或者证明一个定理,将会导致逻辑的失范。

【关键词】形式系统;公理系统;自然演绎系统;形式语言;公理;变形规则
【中图分类号】B812 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2012)03-0039-04

1 引言

彭漪涟和马钦荣主编的《逻辑学大辞典》在第397页说:形式系统是“用形式语言表述的公理系统或自然推理系统”[1]397。以上论述表明形式系统分为两种:一种是形式化的公理系统;另一种是形式化的自然演绎系统。形式系统不仅在类型上有公理系统和自然演绎系统的区别,而且在组成上也有更细节的不同,因而,形式系统具有多样性。

2 公理系统的多样性

形式化的公理系统是从一些初始概念和公理出发,根据一系列推理规则,推演出一系列定理而构成的系统。形式化的公理系统包括四个组成部分:

(1)初始符号。它是构成形式系统的基本单位。

(2)形成规则。它规定由初始符号组成的符号串哪些是合式公式,哪些是不合式的。

(3)公理。它是作为系统中推理的出发点的合式公式的集合。

(4)变形规则。它规定如何从给定的一个或者多个合式公式,经过符号变换得到另一个合式公式。

这里把初始语言和形成规则合称为形式语言,把公理和变形规则合称为演绎装置。

1879年,弗雷格在《概念文字》中建立了逻辑史上第一个完全的公理演算系统。其后,皮亚诺也为此做了不少贡献。罗素和怀特海在1910~1913出版的《数学原理》中建立一个初步自足的完全的逻辑演算的公理系统。希尔伯特和阿克曼在1928年出版的《理论逻辑基础》中简化了罗素-怀特海系统。希尔伯特和贝尔奈斯在1934~1939年出版的《数学基础》中建立了一个不包含量词符号的公理系统。此后,逻辑学家们在不同的理论背景下建立了许多不同的形式化的公理系统。

引进基本概念,确立一组公理,是构造形式化的公理系统的关键。以命题演算的公理系统为例,目前比较常用的公理系统有希尔伯特—阿克曼系统(简称为HA系统)、希尔伯特—贝尔奈斯系统(简称为HB系统)、卢卡西维茨系统(简称为L系统),它们之间的区别最明显地表现在作为公理的合式公式集的不同。

弗雷格系统的公理是:

(1)$p\rightarrow(q\rightarrow p)$

(2)$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$

(3)$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\rightarrow(q\rightarrow(p\rightarrow r))$

(4)$(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

(5)$\neg\neg p\rightarrow p$

(6)$p\rightarrow\neg\neg p$[2]

卢卡西维茨公理系统是对弗雷格公理系统的修改。卢卡西维茨系统(简称为L系统)的公理是:

(1)$A\rightarrow(B\rightarrow A)$

(2)$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

(3)$(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$[3]

罗素—怀特海系统(简称PM系统)的公理是:

(1)真命题所蕴含的命题是真命题

(2)重言原则$(p\vee p)\rightarrow p$

(3)附加原则$p\rightarrow(p\vee q)$

(4)交换原则$(p\vee q)\rightarrow(q\vee p)$

(5)结合原则$p\vee(q\vee r)\rightarrow(p\vee q)\vee r$

(6)叠加原则$(q\rightarrow r)\rightarrow((p\vee q)\rightarrow(p\vee r))$[1]

希尔伯特—阿克曼公理系统是对罗素—怀特海公理系统的修改。希尔伯特—阿克曼系统(简称

收稿日期:2012-07-24
作者简介:王太忠(1972-),男,湖北随州人,讲师,硕士,主要从事形式逻辑与逻辑哲学研究。

为HA系统)的公理是:

(1)(p∨p)→p

(2)p→(p∨q)

(3)(p∨q)→(q∨p)

(4)(q→r)→((p∨q)→(p∨r))[4]

此外,希尔伯特—贝尔奈斯系统(简称为HB系统)给出了包括3条蕴涵公理、3个合取公理、3个析取公理、3个等值公理和3个否定公理在内的15条公理,详细情况请参看杨百顺主编的《现代逻辑启蒙》(中国青年出版社,1989年版,第21页)。

国内学者在他们的逻辑学著作中也讲述了不同的公理系统,这些公理最初是由谁创建的,在这些著作中并没有明确提及。

周礼全的《模态逻辑引论》讲述的命题演算公理系统的公理是:

(1)A→(B→A)

(2)(A→(B→C))→((A→B)→(A→C))

(3)(¬A→B)→((¬A→¬B)→A)[5]

黄华新和胡龙彪的《逻辑学教程》讲述的命题演算公理系统的公理是:

(1)A→(B→A)

(2)(A→(B→C))→((A→B)→(A→C))

(3)(¬A→¬B)→((¬A→B)→A)[6]

此外,陈波在《逻辑学十五讲》(北京大学出版社,2008年版,第224~225页)中给出的一个公理系统包括9条公理。陆钟万在《面向计算机科学的数理逻辑》(科学出版社,2002年版,第164~165页)中给出的一个公理系统包括12条公理。详细情况请参看相关著作。

这些公理系统除了作为推理的出发点的公理不同之外,形式语言(包括初始符号和形成规则)和推理规则(变形规则)也可能不一样。弗雷格公理系统的联结词是"→"和"¬",而罗素——怀特海公理系统的联结词是"→"和"∨"。弗雷格公理系统的推理规则是分离规则、代入规则和后件概括规则,而希尔伯特——贝尔奈斯公理系统的推理规则只有分离规则和代入规则。

这些差异使得同一定理在不同的系统中有不同的证明程序,表现出不同的公式系列。以定理A→¬¬A的证明为例,按照卢卡西维茨公理系统,定理A→¬¬A的证明如下:

例1a.证明定理├A→¬¬A

证明:(1)├¬¬¬A→¬A 已证定理

(2)├(¬¬¬A→¬A)→(A→¬¬A) 公理3

(3)├A→¬¬A (1)(2)分离

按照希尔伯特——阿克曼公理系统,定理p→¬¬p的证明如下:

例1b.证明定理├p→¬¬p

证明:(1)├p∨¬p 已证定理

(2)├¬p∨¬¬p (1)p/¬p

(3)├p→¬¬p (2)定义

按照黄华新和胡龙彪的《逻辑学教程》讲述的公理系统,定理A→¬¬A的证明如下:

例1c.证明定理├A→¬¬A

证明:(1)├A→(¬¬¬A→A) 公理1

(2)├¬¬¬A→¬A 已证定理

(3)├(¬¬¬A→¬A)→(¬¬¬A→A)→¬¬A) 公理3

(4)├(¬¬¬A→A)→¬¬A) (2)(3)分离

(5)├A→¬¬A (1)(4)导出规则

这三个证明之所以在公式系列上差别很大,主要是因为它们所在的公理系统的形式语言、公理或者变形规则是不同的。形式语言、公理或者变形规则的不同把不同的公理系统区别开来,从而使得同一个定理在不同的公理系统内的证明表现为不同的公式系列。

3 自然演绎系统的多样性

与公理化系统不同,形式化的自然演绎系统无需设定公理,而是在形式语言的基础上,依据一系列的推理规则,通过引入假设前提并在最后消去假设前提而推导出命题演算的一切定理。也就是说,形式化的自然演绎系统只包括初始符号、形成规则和变形规则三个组成部分。同公理系统一样,这里把初始符号和变形规则合称为形式语言,而把变形规则成为演绎装置。

1934年,德国数学家甘岑(G.Gentzen)在其《关于逻辑推理的研究》一文中,提出了第一个自然演绎系统。同年,波兰逻辑学家杰司柯夫斯基(S. Jaskowski)在《形式逻辑的假设规则》一文中也提出了后来被人们普遍采用的自然演绎的规则系统。

以命题逻辑自然演绎系统为例,逻辑学家们"建立命题逻辑自然演绎系统的目的,就是要把形式语言全体语法推论关系或全体正确的推理形式包括在这个系统中。而要达到这个目的,关键在于选择一组基本的推导规则,使它们能而且只能推导出所有语法推论关系。究竟选择哪些推导规则,并没有一定之规"[7]。

有些逻辑学专著和教材介绍的命题逻辑自然演绎系统的变形规则包括结构规则和联结词规则。结构规则的具体内容在不同的自然演绎系统

中可能不同。黄华新和胡龙彪的《逻辑学教程》讲述的命题演算自然推理系统中给出的结构规则是:

(1)假设前提引入规则(Hpy):在公式推演中,可根据需要随时引入假设前提。

(2)前提重现规则(R):给定若干前提(包括假设前提)$A_1,A_2,\cdots,A_n$,其中任一$A_i(i=1,2,\cdots,n)$都可以从这些前提中推演出来;或者说,任一A_i都可以在它出现之后的公式序列的任一位置多次重复出现。当$n=1$时,就是从前提A推导出其自身。

(3)假设前提消去规则(Hpy-):若从假设前提$A_1,A_2,\cdots,A_n$,可以推演出B,那么从$A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$,可以推演出$A_n\rightarrow B$,并且$A_n\rightarrow B$不依赖于A_n,而只依赖于$A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$,此时称假设前提A_n被释放了。可依此类推,把所有的假设前提都释放。若一个公式不依赖于任何假设前提,它就是定理[6]。

李娜在《现代逻辑的方法》中为FPC系统给出的结构规则是:

(1)Hyp(假设引入规则):可按需要随时引入一个假设。

(2)Rep(重复规则):在一个假设下出现的公式(包括假设)可允许重复出现。

(3)Reit(重述规则):在一个假设下出现的公式(包括假设)可在随后的假设下重复出现[8]。

这两种结构规则的不同导致同一个定理在这两个系统内证明的差异。以定理$A\rightarrow(B\rightarrow A)$的证明为例,按照黄华新和胡龙彪的《逻辑学教程》中的PN系统的结构规则,证明如下:

例2a.证明$\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$是$P^N$中的定理。

证明:	(1)A	Hpy_1
	(2)B	Hpy_2
	(3)A	R
	(4)$B\rightarrow A$	Hpy_2-
	(5)$\vdash_N A\rightarrow(B\rightarrow A)$	Hpy_1-

按照李娜的《现 辑的方法》中的FPC系统的推理规则,定理$A\rightarrow(B\rightarrow A)$的证明如下:

例2b.证明$\vdash A\rightarrow(B\rightarrow A)$是FPC系统中的定理。

证明:	(1)A	Hpy_1
	(2)B	Hpy_2
	(3)A	Reit
	(4)$B\rightarrow A$	(2)(3)$\rightarrow+$
	(5)$\vdash_{FPC} A\rightarrow(B\rightarrow A)$	(1)(4)$\rightarrow+$

黄华新和胡龙彪模糊了重复和重述的区分,而李娜强调了重复和重述的区分,所以,虽然例2a和例2b的公式系列一样,但是第三行推导的依据不同,例2a用的是R规则,例2b用的是Reit规则。黄华新和胡龙彪的《逻辑学教程》中的P_N系统有假设前提消去规则,因此,在例2a中第四行和第五行的推导依据是“Hpy-”。李娜的《现代逻辑的方法》中的FPC系统没有这个规则,而是在联结词规则中用蕴涵引入规则($\rightarrow+$)规定这种语法推理关系,因此,例2b的第四行和第五行的推导依据是“$\rightarrow+$”。

不同自然演绎系统之间的区别不仅体现在结构规则上,更明显地体现在联结词规则上。很多逻辑学专著和教材介绍的自然演绎系统的联结词规则都不尽相同。黄华新和胡龙彪的《逻辑学教程》中的P_N系统有十条联结词规则,这十条规则分别是蕴涵消去规则、合取引入规则、合取消去规则、析取引入规则、析取消去规则、等值引入规则、等值消去规则、否定消去规则、归谬规则和双重否定规则。李娜的《现代逻辑的方法》中的FPC系统有九条规则,这九条规则分别是蕴含引入规则、蕴涵消去规则、合取引入规则、合取消去规则、析取引入规则、析取消去规则、等值引入规则、等值消去规则、否定消去规则。这两个自然演绎系统的联结词规则不仅数目不同,而且有些规则是共有的,有些规则是特有的。

联结词规则规定了公式推演过程中的语法关系,联结词规则不同,自然推理系统中的定理的证明就会呈现出不同的公式系列,这在不同的自然演绎系统对以同一个名称命名但是对语法推出关系的规定不同的联结词规则那里表现的尤为明显。以析取消去规则“$\vee-$”为例,何向东主编的《逻辑学教程》对NP系统中的析取消去规则的描述是“从$A\vee B$和$\neg A$推出B;从$A\vee B$和$\neg A$推出B”[7]58。而《普通逻辑》编写组编写的《普通逻辑》(增订本)规定“如果$A\vee B$,并且A和B各自都能推演出C,那么我们就能得到结论C。此规则通常称为析取消去规则”[9]。因此,按照何向东主编的《逻辑学教程》给出的NP系统,定理$\neg A\vee\neg B\rightarrow\neg(A\wedge B)$的证明如下:

例3a.证明$\vdash\neg A\vee\neg B\rightarrow\neg(A\wedge B)$是NP中的定理。

证明:	(1)$\neg A\vee\neg B$	Hpy_1
	(2)$\neg\neg(A\wedge B)$	Hpy_2
	(3)$A\wedge B$	(2)导出规则
	(4)A	(3)$\wedge-$
	(5)B	(3)$\wedge-$
	(6)$\neg\neg A$	(4)导出规则
	(7)$\neg B$	(1)(6)$\vee-$
	(8)$B\wedge\neg B$	(5)(7)$\wedge+$

(9)¬(A∧B) (2)(8)¬ -

(10)├NP¬A∨¬B→¬(A∧B) (1)(9)→ +

而按照《普通逻辑》编写组编写的《普通逻辑》(增订本)给出的自然演绎系统,定理¬A∨¬B→¬(A∧B)的证明如下:

例3b.证明├¬A∨¬B→¬(A∧B)是系统中的定理。

证明:(1)¬A∨¬B Hpy$_1$

(2)¬A Hpy$_2$

(3)¬¬(A∧B) Hpy$_3$

(4)A∧B (3)¬¬ -

(5)A (4)∧ -

(6)¬A∧A (2)(5)∧ +

(7)¬(A∧B) (3)(6)¬ -

(8)¬A→¬(A∧B) (2)(7)→ +

(9)¬B Hpy$_4$

(10)¬¬(A∧B) Hpy$_5$

(11)A∧B (10)¬¬ -

(12)B (11)∧ -

(13)¬B∧B (9)(12)∧ +

(14)¬(A∧B) (10)(13)¬ -

(15)¬B→¬(A∧B) (9)(14)→ +

(16)¬(A∧B) (1)(8)(15)∨ -

(17)├¬A∨¬B→¬(A∧B) (1)(16)→ +

这两个证明之所以在公式系列上差别很大,主要是因为它们所在的自然演绎系统对于析取消去规则的语法规定是不同的。形式语言、结构规则或者联结词规则的不同把不同的自然演绎系统区别开来,从而使得同一个定理在不同的自然演绎系统内的证明表现为不同的公式系列。

4 结语

形式语言和演绎装置是形式系统的构成要件。不同的形式语言和演绎装置构成不同的形式系统,系统内定理的证明过程表现出很大的差别。虽然不同的形式系统大多数是等价的,但是不同的形式系统体现了构造者的哲学背景、构造形式系统的理论对象和目的是不同的。“我们创制特殊的人工符号语言,并用它构造形式系统……是带有一定的目的的,这表现在最后我们要对形式系统加以解释,对其中的符号、公式、公式的变换赋予一定的意义,令它们代表一定对象域中的概念、命题和推理等。实际上,这种在形式系统构成之后加给它的解释,在形式系统构造之前已部分地存在于构造者的观念中”[10]。因此,在谈论或者证明一个定理时必须注意的是:形式系统的形式语言和演绎装置为我们界定了形式证明的工具、出发点和依据,同时语义也包含了构造者构造形式系统的理论对象和目的,不同的形式系统内的定理的证明使用的工具、出发点和依据是不同的,离开具体的形式系统去谈论或者证明一个定理,将会导致逻辑的失范。

注释及参考文献:

[1]彭漪涟,马钦荣主编.逻辑学大辞典[Z].上海:上海辞书出版社,2004:397,404.
[2]王宪均.数理逻辑引论[M].北京:北京大学出版社,1982:102-103.
[3]朱水林.现代逻辑引论[M].上海:上海人民出版社,1989:41.
[4]宋文坚主编.新逻辑教程[M].北京:北京大学出版社,1992:139.
[5]周礼全.模态逻辑引论[M].上海:上海人民出版社,1986:12.
[6]黄华新,胡龙彪编著.逻辑学教程[M].杭州:浙江大学出版社,2000:102.
[7]何向东主编.逻辑学教程[M].北京:高等教育出版社,2003.
[8]李娜.现代逻辑的方法[M].开封:河南大学出版社,1997:119.
[9]《普通逻辑》编写组.普通逻辑(增订本)[M].上海:上海人民出版社,1993:97.
[10]陈波.逻辑哲学导论[M].北京:中国人民大学出版社,2000:123.

Discussion on the Diversity of the Formal System

WANG Tai-zhong

(Chinese Department, Zhaotong College, Zhaotong, Yunnan 657000)

Abstract: The formal system on type includes the axiomatic system and the system of natural inference, and on structure includes the formal language and the deductive device. As the builders of the formal system, different people have different philosophy background, theoretical object and purpose, and they might use different formal languages and deductive device, so we have various kinds of formal system, and in different system the(下转46页)

注释及参考文献：

[1]何旭初,苏煜城,包雪松.计算数学简明教程[M].北京:高等教育出版社,1980.

[2]易大义,蒋叔豪,李有法.数值方法[M].杭州:浙江科学技术出版社,1984.

[3]王能超.数值分析简明教程[M].北京:高等教育出版社,1984.

[4]李庆扬,王能超,易大义.数值分析(第4版)[M].北京:清华大学出版社,2001.

[5]丁丽娟.数值计算方法[M].北京:北京理工大学出版社,1997.

[6]史万民,王开荣.数值分析[M].北京:科学出版社,2006.

[8]李荣华,冯果忱.微分方程数值解法[M].北京:人民教育出版社,1980.

[9]薛毅.数值分析与实验[M].北京:北京工业大学出版社,2005.

[10]李庆扬.常微分方程数值解法(刚性问题与边值问题)[M].北京:高等教育出版社,1992.

[11]吴勃英.数值分析原理[M].北京:科学出版社,2003.

[12]J.D.Lambert,Computational methods in ordinary differential equations[M].New York:John wiley and Sons,1973.

The Comparative Test of Fourth Order Adams-Bashforth Combination Formula Predictor-corrector Methods

LIU Dong-bing

(Department of Mathematics and Computer, Panzhihua College, Panzhihua, Sichuan 617000)

Abstract: This paper studies the predictor-corrector method composed by Adams-Bashforth formula with four-order explicit and the predictor-corrector method composed by Adams-Moulton, Hamming and Gear formulas with the same implicit. The numerical comparative test is implemented between these two methods. Thus it obtains that the calculation result of Adams-Bashforth-Hamming predictor-corrector method is more stabler than the other two methods.

Key words: Linear multistep method; Predictor-corrector; Numerical experiment

(上接42页)

arguments of the same theorem have different formula series. The formal language and the dudective device not only define for us the tool, the starting point and the basis of the formal argument, but also imply semantically the theoretical object and purpose of the builder, it will lead to illogic to put aside the specific formal syetem to talk about or argue a theorem.

Key words: Formal system; Axiomatic system; System of natural inference; Formal language; Axiom; Rule of transformation