第26卷第2期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.26,NO.2
2012年06月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Jun.,2012

一类自由项为特定形式的欧拉方程的解法*

谢 东
(亳州师范高等专科学校 理化系,安徽 亳州 236800)

【摘 要】利用变量变换,将一类自由项为特定形式的欧拉方程转化成可用待定系数法求特解的常系数非齐次微分方程,从而可以得到所讨论的方程的通解,并通过实例来验证理论的正确性。

【关键词】欧拉方程;特解;通解
【中图分类号】O175.1 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2012)02-0046-02

1 引言和主要结果

在常微分方程中,有一类比较特殊的类型的方程,就是欧拉方程。

定义[1]:形状为

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x)\qquad(1)$$

的方程称为欧拉方程,这里$a_1,a_2,\cdots,a_n$为常数。f(x)为自由项,当f(x)=0时,称方程为齐次欧拉方程。当f(x)≠0时,称方程为非齐次欧拉方程。

在文献[1]中,运用变量变换:

$x=e^t,t=\ln x,x>0$

使齐次欧拉方程化为常系数齐次线性微分方程,并推导出齐次欧拉方程有形如$y=x^\lambda$的解,这里λ由下面的方程确定

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2)+\cdots+a_n=0\qquad(2)$$

方程(2)也称为特征方程。具体例子请参阅文献[1]。

当f(x)≠0时,常采用常数变易法,参见文献[2],但这种方法较麻烦。本文考虑当自由项f(x)为特定形式的欧拉方程,得到:

命题:欧拉方程

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x)$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为常数,f(x)≠0。当满足f(x)为连续函数且为含对数函数的多项式函数与正余弦函数的一个组合,即$f(x)=P_m(\ln x)x^\lambda$或$f(x)=x^\alpha[A(\ln x)\cos(\beta\ln x)+B(\ln x)\sin(\beta\ln x)]$,这里A,B,$P_m$为带实系数的多项式,则原方程可以通过变量变换化成常系数非齐次线性微分方程,进而可以得到此类方程的通解。

2 主要引理

引理1[1]:常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=0\qquad(3)$$

对应的常系数非齐次线性微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_nx=f(t)\qquad(4)$$

的特解可用比较系数法(待定系数法)。其中f(t)满足下列两种形式:

类型I. $f(t)=P_m(t)e^{\lambda t}$,其中λ为实常数,$P_m(t)$为m(m≥0)次多项式,那么方程(4)有形如

$$\bar{x}=t^kQ_m(t)e^{\lambda t}\qquad(5)$$

的特解。这里k为特征方程F(λ)=0的根λ的重数。(当λ不是特征根时,取k=0,当λ是单特征根时,k=1,当λ是重特征根时,k取重数)。其中$Q_m(t)$为次数不高于m的多项式。

类型II. $f(t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$,其中α,β为常数,而A(t),B(t)为带实系数的t的多项式,且m=max{d(A(t)),d(B(t))}。那么方程(3)有形如$\bar{x}=t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$ (6)

的特解。这里k为特征方程F(λ)=0的根α+βi的重数(k的取法同上)。而P(t),Q(t)为带实系数的t的多项式,且max{d(P(t)),d(Q(t))}≤m。

注1:在类型II中当β=0时,sinβt=0,cosβt=1,类型II其实就变为类型I,因此类型I隶属于类型II。

引理2[1]:设$x_i(t)$(i=1,2,…,n)为方程(3)的基本解组,且$\bar{x}(t)$是方程(4)的某一解,则方程(4)的通解可以表为:

$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}(t)$

引理3[1]:非齐次线性微分方程的叠加原理:设$x_1(t)$,$x_2(t)$分别是非齐次线性微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f_1(t)$$

收稿日期:2012-03-27
*基金项目:安徽省教育厅自然科学研究项目(项目编号:KJ2010B124,KJ2009B093),安徽省省级质量工程项目特色专业数学教育(项目编号:20101184),亳州师专校级精品课程《解析几何》,亳州师专质量工程项目(项目编号:BZSZJYXM201115)。
作者简介:谢 东(1979-),男,讲师,硕士,主要研究方向:基础数学。

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f_2(t)$$

的解,则$x_1(t)+x_2(t)$是方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2(t)\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+a_n(t)x=f_1(t)+f_2(t)$$

的解。

3 命题证明与应用举例

当$f(x)=P_m(\ln x)x^{\lambda}$时,令$x=e^t$,$t=\ln x$ $-\infty<t<+\infty$,则$f(e^t)=P_m(t)e^{\lambda t}$,此时方程(1)的左边化为常系数线性微分方程,方程整体化为引理1的类型I,欧拉方程的特解为$\overline{y}(x)=(\ln x)^{\lambda}Q_m(\ln x)x^{\lambda}$,其中$Q_m$为多项式,k的取法同引理1。

当$f(x)=x^{\alpha}[A(\ln x)\cos(\beta\ln x)+B(\ln x)\sin(\beta\ln x)]$。令$x=e^t$,$t=\ln x$ $-\infty<t<+\infty$,则$f(e^t)=[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$。此时方程(1)的左边化为常系数线性微分方程,方程整体化为引理1的类型II,欧拉方程的特解为$y(x)=(\ln x)^k[P_m(\ln x)\cos(\beta\ln x)+Q_m(\ln x)\sin(\beta\ln x)]x^{\alpha}$,其中$Q_m$为多项式,k的取法同引理1。

结合引理2可得方程(1)的通解y(t)。再把$t=\ln x$代回,就可以得到(1)的通解y(x)。

注2:上述的特解形式不必去记,因为我们把欧拉方程的自变量进行了变换,先把关于新的自变量的通解解出,再把变量代回即可。

注3:由引理3可以将定理推广到自由项是由有限个连续函数构成的情形。

下面列举几个例子。

例1:求解方程:$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=x$

解:令$x=e^t$,$t=\ln x$,$x>0$齐次方程的特征方程$\lambda(\lambda-1)-4\lambda+6=0$,$\lambda^2-5\lambda+6=0$,$\lambda_1=2$,$\lambda_2=3$,即原方程变换为常系数非齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=e^t,$$

因而齐次欧拉方程的通解为$y(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$。设非齐次的特解形式为$\overline{y}(t)=Ae^t$,代入到非齐次线性方程并比较系数得,A=1/2,用$t=\ln x$代回得原方程的通解为$y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x$。

例2:求解方程:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+2x=18x\cos(\ln x)$$

解:令$x=e^t$,$t=\ln x$,$x>0$,齐次方程的特征方程$\lambda(\lambda-1)-\lambda+2=0$,$\lambda_1=1+i$,$\lambda_2=1-i$,即原方程变换为常系数非齐次线性方程$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2x=18e^t\cos t$

因而齐次欧拉方程的通解为$y=C_1e^t\cos t+C_2e^t\sin t$。设非齐次的特解形式为$y(t)=t(A\cos t+B\sin t)e^t$,代入到非齐次线性方程并比较系数得,A=0,B=9,用$t=\ln x$代回得原方程的通解为$y(x)=C_1x\cos(\ln x)+C_2x\sin(\ln x)+9x\ln x\sin(\ln x)$。

例3:求解方程:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+2y=x\ln x+5\cos(\ln x)$$

解:令$x=e^t$,$t=\ln x$,$x>0$,易知方程可分解为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=te^t\text{与}\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=5\cos t,$$

用比较系数法可得特解为$y_1(t)=te^t$与$y_2(t)=\cos t+2\sin t$。用$t=\ln x$代回并结合引理3可得原方程的通解为$y(x)=t[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)]+x\ln x+\cos(\ln x)+2\sin(\ln x)$。

以上三个例子说明,应用命题的结论去解决此类自由项为特定形式的欧拉方程问题非常简洁,此命题有一定的用途与价值。

注释及参考文献:

[1]王高雄,周之铭,朱思铭等.常微分方程(第三版)[M].北京:高等教育出版社,2006.
[2]石瑞青等.常微分方程(第三版)全程导学及习题全解[M].北京:中国时代经济出版社,2007.

The Solution for a Kind of Special Euler Equation

XIE Dong
(Department of Science, Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800)

Abstract: Making use of variable transformation, a kind of special Euler equation can be transformed into a kind of constant-coefficient non-homogenous liner differential equation which can be solved by coefficient comparison method. Thereby its common solution should be obtained. Examples are given to show that the result is correct.

Key words: Euler equation; Special solution; Common solution