第26卷第2期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.26,NO.2
2012年06月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Jun.,2012

分形介质中球向渗流模型解的相似结构*

陈宗荣
(西昌学院 汽车与电子工程学院,四川 西昌 615013)

【摘　要】本文针对分形介质储层中球面径向渗流模型,利用Laplace变换,获得了在考虑井筒储集和表皮系数的井底条件和各种外边界条件下的无量纲储层压力和井底压力的Laplace空间解;并通过深入地分析,发现并研究了解的相似结构和相似核函数的特征。本研究给编制试井分析软件带来了极大的方便,也是渗流力学理论的新进展。

【关键词】分形介质;球面径向渗流;Laplace空间解;相似结构;相似核函数
【中图分类号】O357.3 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2012)02-0028-03

1 引言

自1986年Mandelbrot[1]提出分形理论以后,Chang和Yorsos[2]在1990年将分形理论引入渗流力学,利用分形孔隙的复杂性,理想化地处理自然真实油藏的多孔介质,从而有效地反映实际油藏的复杂性,并建立了分形油藏理论模型。如今,在石油工程学中,分形已成为描述介质的非均质性的有力工具且一直都是一个热门的领域,许多学者在这方面进行了较多的研究,取得了较大的进展。

2005年以来,李顺初等人研究了均质、双孔、双渗、复合、合采等油气藏中储层压力及井底压力分布的Laplace空间解式的相似结构[3-12],获得了大量好的结果。但以往的研究只限于平面径向流,还未见球面径向向心流(球向流)相关方面的研究。

2 数学模型

对于分形均质球向渗流油藏,介质的孔隙度分布和渗透率分布为[2-14]:

$$\phi(r)=\phi_w\left(\frac{r}{r_w}\right)^{d_f-d} \qquad k(r)=k_w\left(\frac{r}{r_w}\right)^{d_f-d-\theta}$$

这里,r—储层中的点到井心的径向距离,m;r_w—井筒半径,m;ϕ_w—井壁处的孔隙度,%;K_w—井壁处的渗透率,m^2。这样,分形介质中球向渗流的数学模型可表述如下:

渗流基本方程

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2}+\frac{d_f-d-\theta+2}{r_D}\frac{\partial p_D}{\partial r_D}=r_D^{\theta}\frac{\partial p_D}{\partial t_D},\quad r_D>1,t_D>0; \tag{1}$$

初始条件

$$P_D(r_D,0)=0; \tag{2}$$

内边界条件

$$\begin{cases} p_{wD}(t_D)=\left[p_D-S\dfrac{\partial p_D}{\partial r_D}\right]\Bigg|_{r_D=1}, \\ C_D\dfrac{dp_{wD}}{dt_D}-\dfrac{\partial p_D}{\partial r_D}\Bigg|_{r_D=1}=q_D(t_D); \end{cases} \tag{3}$$

外边界条件

当外边界无穷大时,$P_D(\infty,t_D)=0$; (4)

当外边界定压时,$P_D(R_D,t_D)=0$; (4')

当外边界封闭时,$\left.\dfrac{\partial p_D}{\partial r_D}\right|_{r_D=R_D}=0$. (4'')

此处:$p_D,p_{wD},t_D,r_D,R_D,q_D,C_D$分别表示无量纲储层压力、无量纲井底压力、无量纲时间、无量纲径向距离、无量纲外边界半径、无量纲流率和无量纲井筒储集系数(下标D表示无量纲),S为表皮因子(或称污染系数),其定义见文献[13,14]。

3 模型求解及解的相似结构

对数学模型(1)-(4)中的无量纲时间t_D作Laplace变换:

$$\overline{p}_D(r,z)=\int_0^\infty e^{-zt_D}p_D(r,t_D)dt_D \tag{5}$$

$$\overline{p}_{wD}(z)=\int_0^\infty e^{-zt_D}p_{wD}(t_D)dt_D \tag{6}$$

$$\overline{q}_D(z)=\int_0^\infty e^{-zt_D}q_D(z)dt_D \tag{7}$$

则在Laplace空间中得到如下的常微分方程边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{p}_D}{dr_D^2}+\dfrac{d_f-d-\theta+2}{r_D}\dfrac{d\overline{p}_D}{dr_D}=r_D^{\theta}z\overline{p}_D,\ r_D>1; \\ \overline{p}_{wD}(z)=\left[\overline{p}_D-S\dfrac{d\overline{p}_D}{dr_D}\right]\Bigg|_{r_D=1}; \\ C_Dz\overline{p}_{wD}-\dfrac{d\overline{p}_D}{dr_D}\Bigg|_{r_D=1}=\overline{q}_D(z); \\ \overline{p}_D(\infty,z)=0,or\ \overline{p}_D(R_D,z)=0,or\ \dfrac{d\overline{p}_D}{dr_D}\Bigg|_{r_D=R_D}=0. \end{cases} \tag{8}$$

边值问题(8)中的定解方程的通解为:

$$\overline{p}_D(r_D,z)=r_D^{\frac{d+\theta-d_f-1}{2}}\left[A\ I_\upsilon\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}r_D^{\frac{\theta}{2}+1}\right)+B\ K_\upsilon\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}r_D^{\frac{\theta}{2}+1}\right)\right] \tag{9}$$

其中$\upsilon=\dfrac{d+\theta-d_f-1}{\theta+2}$,$I_h(\cdot)$、$K_h(\cdot)$分别为h阶的第一类、第二类变型的Bessel函数;A,B为任意常

收稿日期:2012-04-21
*基金项目:国家科技重大专项项目(项目编号:2008ZX50443-14);四川省教育厅自然科学重点项目(项目编号:12ZA164)。
作者简介:陈宗荣(1962-),男,软件工程硕士,副教授,主要从事数学与应用数学方向的研究。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

数,在求特解时由(8)中边值条件确定。

利用(8)中内边界条件,得:

$$\left\{\left[C_D z-(1+C_D Sz)(d+\theta-d_f-1)\right]I_\upsilon\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}\right)-(1+C_D Sz)\sqrt{z}I_{\upsilon+1}\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}\right)\right\}A$$
$$\left\{\left[C_D z-(1+C_D Sz)(d+\theta-d_f-1)\right]K_\upsilon\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}\right)-(1+C_D Sz)\sqrt{z}K_{\upsilon+1}\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}\right)\right\}B=\overline{q}_D(z) \tag{10}$$

当外边界无穷大时,有:

$$A=0 \tag{11}$$

当外边界定压时,有:

$$AI_\upsilon\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}R_D^{\frac{\theta}{2}+1}\right)+BK_\upsilon\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}R_D^{\frac{\theta}{2}+1}\right)=0 \tag{11'}$$

当外边界封闭时,有:

$$\left[(d+\theta-d_f-1)I_\upsilon\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}R_D^{\frac{\theta}{2}+1}\right)+\sqrt{z}R_D^{\frac{\theta}{2}+1}I_{\upsilon+1}\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}R_D^{\frac{\theta}{2}+1}\right)\right]A$$
$$+\left[(d+\theta-d_f-1)K_\upsilon\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}R_D^{\frac{\theta}{2}+1}\right)-\sqrt{z}R_D^{\frac{\theta}{2}+1}K_{\upsilon+1}\left(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}R_D^{\frac{\theta}{2}+1}\right)\right]B=0 \tag{11''}$$

令:

$$\Psi_{m,n}(\alpha,\beta,y)=K_m(\alpha y)I_n(\beta y)+(-1)^{m-n+1}I_m(\alpha y)K_n(\beta y) \tag{12}$$

且定义相似核函数$\Psi(r_D,z)$如下:

$$\Psi(r_D,z)=\begin{cases}\dfrac{K_\upsilon(\lambda r_D{}^\beta)}{\lambda K_{\upsilon+1}(\lambda)}, & \text{外边界无穷大时;}\\[2ex] \dfrac{\Psi_{\upsilon,\upsilon}(r_D{}^\beta,R_D{}^\beta,\lambda)}{\lambda\Psi_{\upsilon+1,\upsilon}(1,R_D{}^\beta,\lambda)}, & \text{外边界定压时;}\\[2ex] \dfrac{\left[(\alpha+\beta\upsilon)\Psi_{\upsilon,\upsilon}(r_D{}^\beta,R_D{}^\beta,\lambda)-\beta\lambda R_D{}^\beta\Psi_{\upsilon,\upsilon+1}(r_D{}^\beta,R_D{}^\beta,\lambda)\right]}{\lambda\left[(\alpha+\beta\upsilon)\Psi_{\upsilon+1,\upsilon}(1,R_D{}^\beta,\lambda)-\beta\lambda R_D{}^\beta\Psi_{\upsilon+1,\upsilon+1}(1,R_D{}^\beta,\lambda)\right]}, & \text{外边界封闭时.}\end{cases} \tag{13}$$

这里

$$\alpha=\frac{d+\theta-d_f-1}{2},\beta=1+\frac{\theta}{2},\lambda=\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2},\upsilon=\frac{d+\theta-d_f-1}{\theta+2}. \tag{14}$$

联立求解关于待定常数A,B的线性方程组(10)、(11),并得确定的A,B代入(9)式中,即得储层内无量纲压力的Laplace空间解,对于无穷大、定压、封闭三种外边界条件,均具有统一的表达式(即解具有相似结构):

$$\overline{p}_D(r_D,z)=\overline{q}_D(z)\cdot r_D^{\frac{d+\theta-d_f-1}{2}}\cdot\frac{1}{C_D z+\cfrac{1}{S+\cfrac{\Psi(1,z)}{1-(d+\theta-d_f-1)\Psi(1,z)}}}$$
$$\cdot\frac{1}{S+\cfrac{\Psi(1,z)}{1-(d+\theta-d_f-1)\Psi(1,z)}}\cdot\frac{\Psi(r_D,z)}{1-(d+\theta-d_f-1)\Psi(1,z)} \tag{15}$$

再利用$\overline{p}_{wD}(z)=\left[\overline{p}_D-S\dfrac{d\overline{p}_D}{dr_D}\right]\Bigg|_{r_D=1}$,即可得到无量纲井底压力的Laplace空间解:

$$\overline{p}_{wD}(r_D,z)=\overline{q}_D(z)\bullet\frac{1}{C_D z+\cfrac{1}{S+\cfrac{\Psi(1,z)}{1-(d+\theta-d_f-1)\Psi(1,z)}}} \tag{16}$$

3 进一步的结论与认识

(1)本文所得结论,包含有诸多特殊情形:当$D_f=0$,θ=0(即υ=0)时,即为均质油藏的情形;当$\overline{q}_D(z)=\dfrac{1}{z}$时,即为常流率的情形;若不考虑井筒储存,则$C_D=0$;若不考虑表皮效应,则S=0。

(2)由(13)式知,解的相似核函数$\Psi(r_D,z)$仅与定解方程的基础解系$I_\upsilon(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}r_D^{\frac{\theta}{2}+1})$,$K_\upsilon(\frac{2\sqrt{z}}{\theta+2}r_D^{\frac{\theta}{2}+1})$和外边界条件有关,而与内边界条件无关。

(3)由(15)式和(16)式知,解的相似结构式仅与内边界条件中的系数S,C_D,$\overline{q}_D$有关,而与外边界条件无关。且由(15)式和(16)式很容易地分析井筒储存与表皮效应对储层压力和井底压力的影响,解的相似结构式的获得,使得内、外边界条件对储层中的压力与井底压力的影响变得十分清晰明了,能简化和优化试井分析软件的编制,为工程师们带来极大的方便。

注释及参考文献:

[1]Mandelbrot B B.The Fractal geometry of nature[M].San Francisco Freeman:1983.

[2]Chang J,Yortsos Y C.Pressure-transient analysis of fractal reservoirs[J].SPE17170,1990(5):31-38.

[3]李顺初.分形双孔介质外边界定压油气藏的试井分析模型解[J].石油钻探技术,2003,31(1):51-52.

[4]李顺初.分形双孔介质封闭油气藏的试井分析模型[J].新疆石油地质,2003,24(2):149-151.

[5]李顺初,郑天璞,徐英.分形均质外边界封闭油藏的试井分析模型解[J].重庆大学学报(自然科学版),2003,26(增刊):130-131.

[6]邓学儒,李顺初.分形复合封闭油藏的试井分析模型解[J].西华大学学报(自然科学版),2005,24(2):4-7.

[7]李顺初,郑鹏社,张宇飞.分形油藏试井分析解的相似结构[A].程林松,单文文,黄世军.资源、环境与渗流力学——第八届渗流力学学术讨论会论文集[C].北京:中国科学技术出版社,2005:79-83.

[8]李顺初,张建军.分形双孔介质油藏试井分析解的相似结构[J].西华大学学报(自然科学版),2006,25(1):40-43.

[9]徐昌学,李顺初,朱维兵.分形复合油藏试井分析解的相似结构[J].钻采工艺,2006,29(5):39-42.

[10]徐文昭,李顺初,郑鹏社.分形均质外边界定压油藏试井分析模型解及分析图板[A].数学及其应用[C].北京:原子能出版社,2007:541-544.

[11]徐文昭,李顺初,郑鹏社.分形均质外边界封闭油藏试井分析模型解及分析图版[J].西华大学学报(自然科学版),2007,26(增刊):217-218.

[12]朱维兵,李顺初,徐昌学.分形合采油藏试井分析解的相似结构[J].钻采工艺,2008,31(3):67-69(-72).

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[13]孔祥言.高等渗流力学[M].合肥:中国科技大学出版社,1995.
[14]同登科,陈钦雷,廖新维,等.非线性渗流力学[M].北京:石油工业出版社,2003.
[15]Horald Stehfest.Numerical inversion of Laplace transforms[J].Communications of the ACM,1970,13(1):47-49.

Similar Structure of Fractal Medium Ball to the Percolation Model Solution

CHEN Zong-rong
(Automobile and Electronic Engineering School, Xichang College, Xichang, Sichuan 615013)

Abstract: Based on the spherical radial flow model in fractal medium reservoirs, using Laplace transformation, this paper obtains dimensionless reservoir pressure and bottomhole pressure Laplace space solution by considering wellbore storage and skin factor of downhole conditions and various boundary conditions. And through in-depth analysis, this paper discovers and studies the similar structure and similar kernel function feature. The research has not only brought great convenience for preparation of well testing analysis software but also the new development of the theory of percolation mechanics.

Key words: Fractal medium; Spherical radial flow; Laplace space Solution; Similar structure; Similar kernel function

(上接27页)

Abstract: Taking wild olive in Liangshan prefecture as raw materials, considering sugar liquid concentration, shading dose, and the acid concentration etc which have some effects on the process of the preserved-fruit wild olive, the orthogonal experiment results show that, in the test conditions within the limited scope, the primary and secondary sequence of the impregnation factors on the impregnation result effects is sugar liquid concentration > shading dose > acid concentration. The best dipping condition for liquid sugar is 45% , and shading dose of concentration of 0.01% is 4% and citric acid is 2%.

Key words: Wild olive; Preserved fruit; Impregnation

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net