第25卷第4期　　西昌学院学报·自然科学版　　Vol.25,NO.4
2011年12月　　Journal of Xichang College·Natural Science Edition　　Dec.,2011

球面镜像中的几何关系

方志聪
（西昌学院,四川 西昌 615013）

【摘　要】对球面镜像所涉及的几何关系进行了分析,镜像电荷所在的位置只要满足三角形相似的条件,就可利用该关系求出镜像电荷的具体位置和电荷量,用几何原理证明了这样的点一定存在,且在球内。

【关键词】静态场;边值问题;球面;镜像;几何
【中图分类号】O441.1　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2011)04-0035-02

对于静态场边值问题,拉普拉斯方程的解法只适用于所研究的区域没有自由电荷的情形,对于所研究的区域存在自由电荷,所满足的方程是泊松方程,其求解比较难,特殊情况下,可用镜像法,它是求解静电场问题的基本分析方法之一。

1 球面镜像

点电荷对导体球面的镜像是一个典型问题,如图1所示:真空中有一半径为a的接地导体球,距球心的距离为d(d>a)处有一点电荷q,求空间各点的电势。

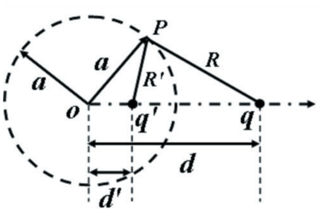

图1　点电荷与接地导体球面的镜像

对于这个问题,经过分析,结论是像电荷位置在球内,并在球心与点电荷的连线上,根据导体球接地,球面上电势为零(边界条件),即可求出像电荷的具体位置和电荷量为[1,2]:

$$d'=\frac{a^2}{d},q'=-\frac{a}{d}q \tag{1}$$

从而求出空间各点的电势。

求像电荷的具体位置和电荷量,常有以下两种方法。

1.1 方法一

根据边界条件,接地导体球面上(r=a时),电势为零,故有[1]:

$$\varphi|_{r=a}=\frac{q}{R}+\frac{q'}{R'}=0$$

设$\angle POq'=\angle POq=\theta$ 。

则:$$\frac{q}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{a^2+d'^2-2ad'\cos\theta}}=0$$

$$(a^2+d^2)q'^2-(a^2+d'^2)q^2-2a\cos\theta(dq'^2-d'q^2)=0$$

而上式对任意θ都成立,故有

$$\begin{cases}(a^2+d^2)q'^2-(a^2+d'^2)q^2=0\\ dq'^2-d'q^2=0\end{cases}$$

所以:$d'=\frac{a^2}{d},q'=-\frac{a}{d}q$

1.2 方法二

根据边界条件,接地导体球面上(r=a时),电势为零,故有[2]:

$$\varphi|_{r=a}=\frac{q}{R}+\frac{q'}{R'}=0$$

则:$\frac{R'}{R}=-\frac{q'}{q}$=常数　(2)

由几何关系可知,只要选q'的位置使得:

ΔOq'P~ΔOPq

那么,这两个三角形对应边成比例。

故有:

$\frac{R'}{R}=\frac{a}{d}=\frac{d'}{a}$=常数　(3)

由(2)、(3)式可得:

$$d'=\frac{a^2}{d},q'=-\frac{a}{d}q$$

2 几何关系的进一步分析

从几何关系来看,只要选q'的位置使得:

ΔOq'P~ΔOPq

即可利用该关系求出q'的具体位置和电荷量,这样的q'点一定存在吗? 下面对此进行分析。

2.1 证明∠Oqp<∠OPq

从圆外一点q与圆心O及圆周上任一点P所构成的三角形ΔOPq中,a边所对应的角∠OqP一定小于d边所对应的角∠OPq。

因为在ΔOPq中:

a边对应∠OqP

d边对应∠OPq

而半径a一定小于圆外一点q与圆心O的距离

收稿日期:2011-10-07
作者简介:方志聪(1965-),男,副教授,主要从事基础物理教学与研究。

d，即：

$a<d$ （4）

根据三角形中大边对大角，故：

$\angle OqP<\angle OPq$ （5）

2.2 证明$\Delta Oq'P\sim\Delta OPq$

从$\angle OPq$的顶点P引出一条线和对边（d边）相交于q'点。

因为：$\angle OqP<\angle OPq$

故一定存在角$\angle OPq'$，使得：

$\angle OPq'=\angle OqP$ （6）

又因：$\angle OPq'=\angle POq=\theta$

所以：$\Delta Oq'P\sim\Delta OPq$ （7）

即一定能找到一点（q'点），使得两个三角形相似，这样的一点一定存在。

2.3 证明$d'<a$

证明q'点一定在圆内，即$d'<a$。

$\Delta Oq'P\sim\Delta OPq$，对应边成比例：

$$\frac{R'}{R}=\frac{a}{d}=\frac{d'}{a}$$

对应边分别是R'与R，a与d，d'与a。

在ΔOPq中：

a边对应$\angle OqP$

d边对应$\angle OPq$

而：$a<d$

根据大边对大角，故：

$\angle OqP<\angle OPq$

而在与之相似的另一三角形$\Delta Oq'P$中：

d'边对应的角$\angle OPq'=\angle OqP$

a边对应的角$\angle Oq'P=\angle OPq$

所以：

$\angle OPq'<\angle Oq'P$

所以：

$d'<a$ （8）

2.4 证明P点为圆周上任意一点时，两三角形始终是相似三角形

P点为圆周上任意一点，当P点在圆周上变动时，a、d'、d均不变，两相似三角形的两组对应边仍成比例：$\frac{a}{d}=\frac{d'}{a}$

而其对应的夹角相等，即：

$\angle POq'=\angle POq=\theta$

根据两三角形的两组对应边的比相等，并且相应的夹角相等，则两三角形相似，即：

$\Delta Oq'P\sim\Delta OPq$

故P点在圆周上变动时，即P点为圆周上任意一点时，两三角形始终是相似三角形。

综上所述，从几何关系来看，q的镜像电荷q'所在的位置满足$\Delta Oq'P\sim\Delta OPq$，这样的点一定存在，且在球内，并可利用该关系求出q'的具体位置和电荷量。

上述分析对导体圆柱面的镜像问题的分析也有帮助。

注释及参考文献：

[1]谢处方.饶克谨等.电磁场与电磁波[M]第四版.北京：高等教育出版社，2006：136-138.

[2]郭硕鸿.电动力学[M]第二版.北京：高等教育出版社，1997：70-75.

Geometrical Relationship Found among Mirror Images Formed by Spherical Surface

FANG Zhi-cong

（*Xichang College，Xichang，Sichuan 615013*）

Abstract: An analysis of geometrical relationship involved in mirror images formed by spherical surface is performed. The study shows that if the positions of mirror-image charges meet the condition，the similarity principle of triangle，the exact position and quantity of the electric charge can be found by using this relationship. Geometry theory proves the existence of this point and it is within the sphere.

Key words: Static field；Boundary-value problem；Spherical surface；Mirror image；Geometry