具非局部源的半线性发展方程的爆破问题*

宋士勤[1,2],唐树乔[2,3]
(1.安徽大学 数学科学学院,安徽 合肥 230039;2.亳州师范高等专科学校 理化系,安徽 亳州 236800;
3.东南大学 数学系,江苏 南京 211100)

【摘 要】研究了下列带有非局部源项的半线性发展方程

$$u_t = \Delta u + u^r \int_\Omega u^{p(x)}dx$$

以及

$$u_{tt} = \Delta u + u^r \int_\Omega u^{p(x)}dx$$

的爆破现象,证明了方程的非负解在有限时刻爆破。

【关键词】非局部源;变指标;半线性发展方程;爆破
【中图分类号】O175.26 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2011)04-0033-02

1 引言

近十年来,一类带有变指标反应项的半线性发展方程解的爆破现象开始步入人们的视野,并逐渐引起人们的关注。不过,关于这方面的论文则是少之又少[1-4]。本文考虑既含有变指标反应项又含有非局部源项的半线性发展方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^r \int_\Omega u^{p(x)}dx, (x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x\in\Omega \\ u(x,t) = 0, (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \end{cases} \quad (1)$$

以及

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + u^r \int_\Omega u^{p(x)}dx, (x,t)\in\Omega\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x\in\Omega, \\ u_t(x,0) = u_1(x), x\in\Omega, \\ u(x,t) = 0, (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \end{cases} \quad (2)$$

其中$\Omega\subset R^N$是带有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域,$r\geqslant 0$,$p(x)$、$u_0(x)$和$u_1(x)$都是非负连续有界函数且$u_0(x)$和$u_1(x)$都不恒等于0。为了下文叙述的方便,我们定义:

$$p_- = \inf_{x\in\Omega} p(x), p_+ = \sup_{x\in\Omega} p(x)$$

2 引理

定义2.1 如果存在常数$T(0<T<\infty)$,使得方程(1)的解$u(x,t)$在$\Omega\times[0,T)$上存在,并且有$\lim_{t\to T^-}\sup\max_{x\in\Omega}|u(x,t)| = \infty$,那么称方程(1)的解$u(x,t)$在有限时刻T爆破,时间T称为爆破时间。

引理2.1(Jensen's不等式)设$p>1$,函数$\varphi(x)$满足$\int_\Omega \varphi(x)dx = 1$

则对于任意的非负函数$u(x)$满足不等式:

$$\int_\Omega u^p(x)\varphi(x)dx \ge \left(\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx\right)^p.$$

引理2.2设$f(t)$为连续可导函数且满足不等式:

$$f'(t)\ge -mf(t)+nf^p(t)$$

其中常数$p>1$,$m,n>0$.若

$$f(0)>0, -mf(0)+nf^p(0)>0$$

则$f(t)$爆破。

引理2.3[5]设$y(t)\in C^2$满足

$$y''\ge h(y(t))$$

$y(0)=\alpha>0$,$y'(0)=\beta>0$,对于所有的$s\geqslant\alpha$,都有$h(s)\geqslant 0$。那么$y'(t)>0$且

$$t\le\int_\alpha^{y(t)}\left(\beta^2+2\int_\alpha^s h(x)dx\right)^{-\frac{1}{2}}ds.$$

3 方程(1)解的爆破性质

对于方程(1)的解的爆破性质,我们有如下结论:

定理3.1 设$\Omega\subset R^N$是带有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域,$r\geqslant 0$,$p(x)$是非负连续有界函数,那么当$p_-+r>1$时,对于充分大的初值$u_0(x)$,方程(1)的非负解$u(x,t)$在有限时刻爆破。

证明:设λ是$-\Delta$带有齐次Dirichlet边界条件的第一特征值,$\varphi(x)$是相应的特征向量,并规范化为$\int_\Omega\varphi(x)dx = 1$。

令

$$\eta(t) = \int_\Omega u(x,t)\varphi(x)dx$$

连续两次应用格林公式得

$$\begin{aligned}\eta'(t) &= \int_\Omega u_t(x,t)\varphi(x)dx \\ &= \int_\Omega\varphi(x)\Delta u(x,t)dx + \int_\Omega u^r(x,t)\left(\int_\Omega u^{p(x)}(x,t)dx\right)\varphi(x)dx \\ &= \int_\Omega\varphi(x)\Delta u(x,t)dx + \int_\Omega u^r(x,t)\varphi(x)dx\int_\Omega u^{p(x)}(x,t)dx \\ &\ge -\lambda\eta(t) + c_1\int_\Omega u^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx\int_\Omega u^r(x,t)\varphi(x)dx\end{aligned}$$

收稿日期:2011-08-11
*基金项目:安徽省自然科学基金(KJ2011Z258);亳州师范高等专科学校数学教育专业(省级特色专业)和江苏省基础研究计划(自然科学基金)-面上项目(BK2010404)。
作者简介:宋士勤(1973-),男,安徽蒙城人,讲师,硕士研究生,主要从事微分方程研究。

其中 $c_1=\frac{1}{\|\varphi(x)\|_\infty}$。下面我们来处理 $\int_\Omega u^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx$ 这一项：

$$\int_\Omega u^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx=\int_{\{u<1\}}u^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx+\int_{\{u\ge1\}}u^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx$$
$$\ge\int_{\{u\ge1\}}u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx$$
$$=\int_{\{u\ge1\}}u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx+\int_{\{u<1\}}u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx-\int_{\{u<1\}}u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx$$
$$\ge\int_\Omega u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx-\int_{\{u<1\}}u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx$$
$$\ge\int_\Omega u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx-c_2$$

其中 $C_2>0$。应用Jensen's不等式可以得到

$$\eta'(t)\ge-\lambda\eta(t)+c_1\eta^r(t)\left(\eta^{p_-}(t)-c_2\right)$$
$$=-\lambda\eta(t)+c_1\eta^{p_-+r}(t)-c_1c_2\eta^r(t)$$

只要 $\eta(0)\ge(2c_2)^{\frac{1}{p_-}}$，就有

$$\eta'(t)\ge-\lambda\eta(t)+\frac{1}{2}c_1\eta^{p_-+r}(t)$$

于是根据引理2.2，方程(1)的非负解u(x，t)在有限时刻爆破。

4 方程(2)解的爆破性质

定理4.1 设 $\Omega\subset R^N$ 是带有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$r\ge0$，p(x)是非负连续有界函数，那么当 $p_-+r>1$ 时，对于充分大的初值 $u_0(x)$ 和 $u_1(x)$，存在有限的时间T，使得方程(2)的非负解u(x，t)在有限时刻T爆破。

证明：设λ是$-\Delta$带有齐次Dirichlet边界条件的第一特征值，$\varphi(x)$ 是相应的特征向量，并规范化为 $\int_\Omega\varphi(x)dx=1$。

首先，我们有

$$\int_\Omega u^{p(x)}(x,t)\varphi(x)dx\ge\int_\Omega u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx-\int_{\{u<1\}}u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx$$
$$\ge\int_\Omega u^{p_-}(x,t)\varphi(x)dx-c$$

其中C>0。令

$$\eta(t)=\int_\Omega u(x,t)\varphi(x)dx$$

应用格林公式和Jensen's不等式，可以得到

$$\eta''(t)=\int_\Omega u_t(x,t)\varphi(x)dx$$
$$\ge-\lambda\eta(t)+c_1\eta^{p_-+r}(t)-c_1c\eta^r(t)$$

只要 $\eta(0)\ge(2c_2)^{\frac{1}{p_-}}$，就有

$$\eta''(t)\ge-\lambda\eta(t)+\frac{1}{2}c_1\eta^{p_-+r}(t)$$

于是，当 $\alpha=\eta(0)$ 充分大时(同时满足条件 $\eta(0)>(2c)^{\frac{1}{p_-}}$)，我们有 $-\lambda\eta(t)+\frac{1}{2}c_1\eta^{p_-+r}(t)>0$，再注意到

$$\alpha=\eta(0)=\int_\Omega u_0(x)\varphi(x)dx$$

$$\beta=\eta'(0)=\int_\Omega u_1(x)\varphi(x)dx$$

又

$$\eta(t)=\int_\Omega u(x,t)\varphi(x)dx\le\left\|u(x,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega\varphi(x)dx=\left\|u(x,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

于是由引理2.3可以推知，方程(2)的非负解u(x，t)在有限时刻爆破。

注释及参考文献：

[1]S.N.Antontsev，S.I.Shmarev，Existence and uniqueness of solutions of degenerate parabolic equations with variable exponents of nonlinearity，J.Math.Sci.150(2008)：2289-2301.

[2]M.M.Bokalo，I.B.Pauchok，On the well-posedness of a Fourier problem for nonlinear parabolic equations of higher order with variable exponents of nonlinearity，Mat.Stud.26(2006)：25-48.

[3]S.N.Antontsev，S.I.Shmarev，A model porous medium equation with variable exponent nonlinearity：existence，uniqueness and localization properties of solutions，Nonlinear Anal.60(2005)：515-545.

[4]Ferreira，R.，de Pablo，A.，P é rez-Llanos，M.，Rossi，J.D.：Critical exponents for a semilinear parabolicequation with variable reaction，preprint.

[5]R.T.Glassey，Blow-up theorems for nonlinear wave equations[J].Math.Z.132(1973)：183-203.

Blow-up Problem for Semilinear Evolution Equations With Nonlocal Sources

SONG Shi-qin[1,2]，TANG Shu-qiao[2,3]

(1.School of Mathematics Science，Anhui University，Hefei，Anhui 230039；
2.Department of Science，Bozhou Teachers College，Bozhou，Anhui 236800；
3.Department of Mathematics，Southeast University，Nanjing，Jiangsu 211100)

Abstract: In this paper，we study the following semilinear evolution equations with nonlocal sources：

$$u_t=\Delta u+u^r\int_\Omega u^{p(x)}dx$$

and

$$u_{tt}=\Delta u+u^r\int_\Omega u^{p(x)}dx$$

The finite-time blow-up of the nonnegative solutions is proved.

Key words: Nonlocal sources；Variable exponents；Semilinear evolution equation；Blow-up