

关于复域中指数函数的代数性质探讨

黄晓华

(华南师范大学, 广东 广州 510631)

【摘要】复域中的指数函数是多值函数,与实域中的指数函数有不同的代数性质。一般教材中不涉及多值函数的复合问题,本文利用对数函数与幂函数这2个多值函数的复合,证明 $(a^w)^z \neq a^{wz}$, $(a^z)^w \neq (a^w)^z$,并得出关于复域中指数函数的代数性质。

【关键词】复域;指数函数;函数复合

【中图分类号】O174.5 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2011)04-0031-02

引言

在实域中,指数函数的代数性质满足

$$(a^w)^z = (a^z)^w = a^{zw[1]} \quad (1)$$

在复域中,有如下定义:

定义1^[2] 满足 $w = a^z = e^{z \ln a}$ ($a \neq 0, \infty$ 为复常数)称为一般指数函数。

定义2^[3] 满足 $e^w = z$ ($z \neq 0$) 的函数 $w = f(z)$ 称为对数函数,记为 $w = \text{Ln}z$

其中,

$$\text{Ln}z = \ln^+ |z| + i \arg z + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

这里 $\ln^+ |z|$ 表示 $|z|$ 的实对数。

1 复域中的指数函数性质

在实域中,指数函数的代数性质满足 $(a^w)^z = (a^z)^w = a^{zw}$,那么复域中指数函数能否满足性质(1)呢?

现有一例,令 $z = \frac{1}{2}$,一方面有

$$(a^w)^z = (a^w)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \text{Ln}(e^{w \ln a})} = e^{\frac{1}{2} [w \ln a + 2k\pi i]} = e^{\frac{1}{2} w \ln a + k\pi i} \quad (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots)$$

$$(a^z)^w = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^w = e^{w \text{Ln}(a^{\frac{1}{2}})} = e^{w \left[\frac{1}{2} \ln a + 2k\pi i\right]} = e^{\frac{1}{2} w \ln a + k\pi i + 2w k\pi i} \quad (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots)$$

另一方面

$$a^{wz} = a^{\frac{1}{2} w} = e^{\frac{1}{2} w \ln a + k\pi i w} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

即当 $z = \frac{1}{2}$ 时,有 $(a^w)^{\frac{1}{2}} \neq a^{\frac{1}{2} w}$ ($a \neq 0$) 且 $(a^{\frac{1}{2}})^w \neq \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^w$ ($a \neq 0$),即有 $(a^w)^z \neq a^{wz}$ 且 $(a^z)^w \neq (a^w)^z$ 。

2 提出问题

从以上的 $(a^w)^{\frac{1}{2}} \neq a^{\frac{1}{2} w}$ ($a \neq 0$) 且 $(a^{\frac{1}{2}})^w \neq \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^w$ ($a \neq 0$) 可知,复域中指数函数不满足性质(1),那么提出问题,对于任意 w, z ,是否有 $(a^w)^z \neq a^{wz}$, $(a^z)^w \neq (a^w)^z$ 。

3 相关知识准备

为了证明问题 $(a^w)^z \neq a^{wz}$, $(a^z)^w \neq (a^w)^z$ 成立,需要以下相关知识的准备。

3.1 公式准备

为了解决以上问题,需要以下公式。

对于式(2), $\text{Ln}z = \ln^+ |z| + 2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$),当 $w = e^z$ 时,有 $\text{Ln}e^z = \ln^+ |e^z| + 2k\pi i$

当 $z = x + iy$ 时, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$,

特别地,当 $x = 0, y = 2k\pi$ 时, $e^z = e^0(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = 1$

那么可以推导出以下公式

$$\begin{aligned} \text{Ln}e^z &= \ln^+ |e^z| + i \arg e^z + 2k\pi i \\ &= \ln^+ |e^z| + i \arg e^x(\cos y + i \sin y) + 2k\pi i \\ &= x + iy + 2k\pi i \\ &= z + 2k\pi i \end{aligned} \quad (4)$$

3.2 定义准备

另外,在证明过程中,需要运用幂函数,那么在复域中,幂函数有如下定义。

定义3^[3]: 设 α 是一复常数,定义 z ($z \neq 0$) 的 α 次幂函数为

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln} z} \quad (z \neq 0)$$

$$\text{令 } f_1 = f(w, z) = (a^w)^z, f_2 = f(z, w) = (a^z)^w, f_3 = f(zw) = a^{zw}$$

故由式(3)和式(4)有

$$f_1 = (a^z)^w = e^{z w \text{Ln} a + 2k_1 \pi i w z + 2k_2 \pi i z} \quad (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots) \quad (5)$$

$$\text{同理 } f_2 = (a^z)^w = e^{z w \text{Ln} a + 2k_1 \pi i w z + 2k_2 \pi i w} \quad (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots) \quad (6)$$

$$f_3 = a^{zw} = e^{z w \text{Ln} a} = e^{z w (\text{Ln} a + 2k\pi i)} = e^{z w \text{Ln} a + 2k\pi i w z} \quad (k = 0, \pm 1, \dots) \quad (7)$$

4 证明 $(a^w)^z \neq a^{wz}$, $(a^z)^w \neq (a^w)^z$

4.1 证明 $(a^w)^z \neq a^{wz}$

在复域中,指数函数不再满足实域中的性质,即 $(a^w)^z \neq a^{wz}$,可利用对数函数与幂函数的复合来证明,证明如下。

首先,说明一点,由于 $(a^w)^z$ 与 $(a^z)^w$ 结构具有对称性,那么我们讨论 z 的取值与讨论 w 的取值,其实质是一样的,在这里,只讨论 z 的取值。

(1) 当 $z = 0$ 时,由式(6)可知, $f_1 = f(w, 0) = e^0 = 1$,由式(7)可知, $f_3 = f(0w) = e^0 = 1$,则 $(a^w)^z = a^{wz}$

(2) 当 z 是非零整数 n 时,由式(6),式(7),可知, $f_1 = f(w, n) = e^{n w \text{Ln} a + 2k_1 \pi i n w + 2k_2 \pi i n} = e^{n w \text{Ln} a + 2k_2 \pi i n w} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$

$$f_3 = f(nw) = e^{n w \text{Ln} a + 2k\pi i n w} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

即有 $(a^w)^z = a^{wz}$

(3) 当 $z = \frac{p}{q}$ (p, q 为互素的整数, $q \neq 0$ 且 $q \neq 1$) 为

收稿日期: 2011-08-21

作者简介: 黄晓华(1989—),女,广东汕头人,本科,研究方向: 数学与应用数学。
?1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

有理数时,

$$f_1 = f(w, \frac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q} w \ln a + 2k_1 \pi i w \frac{p}{q} + 2k_2 \pi i \frac{p}{q}} (k_1, k_2 = 0, 1, \dots, q-1)$$

$$f_3 = f(\frac{p}{q} w) = e^{\frac{p}{q} w \ln a + 2k_1 \pi i w \frac{p}{q}} (k = 0, 1, \dots, q-1)$$

则有 $(a^w)^z \neq a^{wz}$, 且 $(a^w)^z = e^{2k_1 \pi i} \cdot a^{wz}$ 。

(4) 当 z 是无理数 μ 时,

$$f_1 = f(w, \mu) = e^{\mu w \ln a + 2k_1 \pi i \mu w + 2k_2 \pi i \mu} (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots)$$

$$f_3 = f(\mu w) = e^{\mu w \ln a + 2k_1 \pi i \mu w} (k = 0, \pm 1, \dots)$$

则有 $(a^w)^z \neq a^{wz}$, 且 $(a^w)^z = e^{2k_1 \pi i} \cdot a^{wz}$ 。

(5) 当 z 是虚数时, 令 $z = \alpha + \beta i$ ($\beta \neq 0$), 则

$$f_1 = f(w, \alpha + \beta i) = e^{(\alpha + \beta i) w \ln a + 2k_1 \pi i (\alpha + \beta i) w + 2k_2 \pi i (\alpha + \beta i)}$$

$$= e^{(\alpha + \beta i) w \ln a + 2k_1 \pi i (\alpha + \beta i) w + 2k_2 \pi i \alpha - 2k_2 \pi \beta} (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots)$$

$$f_3 = f((\alpha + \beta i) w) = e^{(\alpha + \beta i) w \ln a + 2k_1 \pi i (\alpha + \beta i) w} (k = 0, \pm 1, \dots)$$

则有 $(a^w)^z \neq a^{wz}$, 且 $(a^w)^z = \begin{cases} e^{2\beta k \pi} \cdot a^{wz} & (\text{当 } \alpha \text{ 为整数时}) \\ e^{2\beta k \pi} \cdot a^{wz} & (\text{当 } \alpha \text{ 非整数时}) \end{cases}$

综上所述, 当 z 为整数时, $(a^w)^z = a^{wz}$; 当 z 非整数的实数时, $(a^w)^z = e^{2k_1 \pi i} \cdot a^{wz}$; 当 $z = \alpha + \beta i$ ($\beta \neq 0$) 为复数时, $(a^w)^z = \begin{cases} e^{2\beta k \pi} \cdot a^{wz} & (\text{当 } \alpha \text{ 为整数时}) \\ e^{2\beta k \pi} \cdot a^{wz} & (\text{当 } \alpha \text{ 非整数时}) \end{cases}$

4.2 证明 $(a^w)^z \neq (a^z)^w$

在复域中, 指数函数不再满足实域中的性质, 即 $(a^w)^z \neq (a^z)^w$, 这里利用对数函数与幂函数的复合来证明, 证明如下。

注释及参考文献:

- [1] 徐美琴, 许三保. 指数函数与对数函数[M]. 上海: 上海教育出版社, 1978.
- [2] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] 陈宗煌, 孙道椿, 刘名生. 复变函数[M]. 北京: 科学出版社, 2010.

The Algebraic Properties of Exponential Function in the Complex Domain

HUANG Xiao-hua

(South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510631)

Abstract: The properties of exponential function in the complex domain are different from that in the real domain. Now there is no textbook that involves researching compound multi-valued function, here we use the compound of power function and logarithm function to prove $(a^w)^z \neq a^{wz}$, $(a^w)^z \neq (a^z)^w$, and draw on the algebraic properties of exponential function in the complex domain.

Key words: Complex domain; Exponential function; Compound function

由(6)、(7)式有

$$f_1 = (a^z)^w = e^{zw \ln a + 2k_1 \pi i wz + 2k_2 \pi i z} (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots)$$

$$f_2 = (a^z)^w = e^{zw \ln a + 2k_1 \pi i wz + 2k_2 \pi i z} (k_1, k_2 = 0, \pm 1, \dots)$$

将式(6)与式(7)相除, 可以得到

$$f_1 \div f_2 = (a^w)^z \div (a^z)^w = e^{zw \ln a + 2k_1 \pi i wz + 2k_2 \pi i z} \div e^{zw \ln a + 2k_1 \pi i wz + 2k_2 \pi i z} = e^{2(z-w)k \pi i} (k = 0, \pm 1, \dots)$$

则由式(3)可知只要 $z-w=k$ ($k=0, \pm 1, \dots$), 即 $z-w$ 为整数时, 有

$$(a^w)^z \div (a^z)^w = 1, \text{ 即 } (a^w)^z = (a^z)^w$$

否则, 若 $z-w$ 为非整数的有理数 $\frac{p}{q}$ 时,

$$(a^w)^z \div (a^z)^w = e^{2(z-w)k \pi i} = e^{\frac{2pk \pi i}{q}} \neq 1 (k = 0, 1, \dots, q-1)$$

若 $z-w$ 为非整数的无理数 μ 时,

$$(a^w)^z \div (a^z)^w = e^{2(z-w)k \pi i} = e^{2\mu k \pi i} \neq 1 (k = 0, \pm 1, \dots)$$

若 $z-w$ 为复数 $\mu = \alpha + \beta i$ 时,

$$(a^w)^z \div (a^z)^w = e^{2(z-w)k \pi i} = e^{2(\alpha + \beta i)k \pi i}$$

$$= \begin{cases} e^{-2\beta k \pi} & (\text{当 } \alpha \text{ 为整数时}) \\ e^{2\beta k \pi} & (\text{当 } \alpha \text{ 非整数时}) \end{cases} \neq 1 (k = 0, \pm 1, \dots)$$

5 结论

由于复域中的指数函数是多值函数, 故在复域中指数函数不再满足实域中的性质, 特别地, 当 z 为整数时, 有 $(a^w)^z = (a^z)^w = a^{zw}$, 当 z 为非整数时, 有 $(a^w)^z \neq a^{wz}$, $(a^w)^z \neq (a^z)^w$ 。