

# 溯源探流谈高等代数内容的改革

卢西庄

(亳州师范高等专科学校 理化系,安徽 亳州 236800)

**【摘要】**为了培养应用型、创新型人才;为了将抽象的《高等代数》内容由学术形态转变为教育形态,从理论上探讨了如何就两个方面对《高等代数》的内容进行改革:一是从背景问题出发,在研究解决背景问题的过程中,逐步引入概念等理论体系;另一方面是加强应用的教学。从而使《高等代数》内容的来龙去脉更加明确,提高教学质量。

**【关键词】**高等代数;背景问题;形式化;应用

**【中图分类号】**O15 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2011)03-0123-03

高等代数是大学数学专业的重要基础课程,它的内容已渗透到数学的许多分支,是理工科各专业的重要数学工具,同时还被广泛应用于经济学、管理学等学科。高等代数以其抽象的形式和严密的逻辑在培养学生逻辑思维能力、运算能力、抽象分析能力和推理能力方面起到不可替代的作用。

传统的《高等代数》教材内容比较抽象,过于形式化,难于被学生接受。在我国高等教育已走向大众化的今天,教与学的这种矛盾变得尤为突出。另一方面,传统教材在实际应用方面着墨较少,不能体现这门学科的基础性和广泛的应用价值。怎样将这门学科的知识从学术形态转化为教育形态;帮助学生认清这门学科的源流;培养学生的应用能力及创新能力是教材内容改革将要面临的任务。

## 1 由背景问题引入教学内容

### 1.1 怎样改革

欧几里得的公理化方法在数学上大行其道,为人类文明做出了不可磨灭的贡献。流行于世的教科书深受其影响,其中不乏叙述严密,体系完备的上乘之作。其内容的一般编排方式依照定义、公理、引理、定理、推论的顺序,但对于学生的学习却未见其善。因为学生在开始学习的时候,并不知道最终要达到一个什么目的,学生只是被动的理解。如果这一过程持续较长,学生容易失去耐心和兴趣,于学不利。而中国古代数学文献表述的传统方法是从问题出发,建立数学模型,提出算法,最终解决问题<sup>[6]</sup>。读这种文献的好处在于开始就有明确的目标,能调动读者的积极性和主动性。若能将二者结合起来扬长避短,不失为良策。内容的组织可以沿着这样的路线:从问题而不是定义出发,也就是首先提出一个重要而又能引起学生兴趣的背景问题,然后引导学生一步步建立数学模型来描述和解决这些问题,在解决问题的过程中引出概念和方法

等理论。

### 1.2 背景问题的作用

人类的思维是在问题的驱动下逐步展开的。在背景问题的驱动下,学生的思维才有一个明确的目标,才能积极地参与教学活动。

展现一个背景问题的解决过程就是在解剖麻雀,是在从具体走向一般,是在给抽象的理论提供一个附着点,提供具体的支撑。

从具体的问题出发,逐步构造出一般理论,这一过程的展现为培养学生的创造性思维能力提供了启发和例证。

数学研究往往是从研究一个具体问题开始,然后归纳概括出一般的理论方法。教学内容如果能够如实地反映这一过程,必将增加学生对数学知识发展历史的了解,了解知识的发生过程。也只有这样,才便于读者从整体上理解知识,把握知识结构,既见树木又见森林,学到的知识成为一个活的有机体,为更好地运用所学知识解决问题奠定基础。

### 1.3 背景问题的选择原则

1.3.1 一套理论的产生起源于某些个别问题,如果其中某个问题是学生能够理解的,那么把它作为背景问题就比较合适。一是反映了历史的真实;二是读者在见证理论的产生过程中获得某些启发,使发现的技艺得到推进<sup>[5]</sup>。

1.3.2 来自于客观世界的问题。从自然、社会现象中提出的问题总是真实的、有意义的、没有人为的造作。另一方面,由于各种客观现象并非孤立存在的,从一个问题开挖下去,往往联系着一片数学沃土,能够找到较为广泛的应用。

1.3.3 与学生的生活密切相连的问题。此类问题在某些方面为学生所熟悉,容易引起学生的兴趣;能够使体会到解决这类问题的必要性,是背景问题的好选项。

收稿日期:2011-07-05

作者简介:卢西庄(1966-),男,安徽蒙城人,讲师,硕士,研究方向为微分方程的奇摄动理论。

1.3.4 有的问题在解决的过程中,可以引发一系列的概念、理论这类问题应该给予特别的关注。比如解线性方程组的问题:

方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 19x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 24x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

方程组的解写成有序数组  $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , 其全部的集合用  $V$  表示。在其上规定乘法及数乘运算, 这两种运算在  $V$  上是封闭的, 且满足八条性质, 成为向量空间, 叫做方程组(1)的解空间。

采用消元法可将方程组(1)化为同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其过程是采用方程组的三种同解变换: 交换两个方程的位置; 将一个方程的两边同乘以一个非零数; 将一个方程的两边同乘以一个数加到另一个方程上去。这实际上就是对其系数矩阵进行三种相应的变换, 叫做矩阵的初等变换。

方程组(1)的后两个方程在消元后都变为“ $0=0$ ”, 具体地说就是后两个方程可由前两个方程得到, 不是独立的。换个说法就是: 后两个方程的系数构成的向量是前两者的线性组合, 这些向量线性相关。

方程组(2)移项后变为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 5x_4 \\ x_3 = -3x_4 \end{cases} \quad (3)$$

容易看出: 通解以向量的形式可表示为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

都是解向量  $(-2, 1, 0, 0)^T$  与  $(5, 0, -3, 1)^T$  的线性组合, 这两个向量线性无关, 称作方程组(1)的解空间的一个基, 它们可以构成方程组的解空间。

如此等等, 引出了一系列的概念, 并示范了解齐次线性方程组的一般方法。这样的问题在科研中是好问题, 在教学中也是好的背景问题。

#### 1.4 背景问题与理论体系的阐述

对于一个背景问题, 如果运用某种方法, 按照一定的步骤, 可求得结果, 那么可以在解决问题的过程中引出概念及有关结论, 然后精确建立一般理论体系。现在就上面给出的例子做些说明:

在解方程组(1)的过程中, 引出了“向量空间”这个概念, 对此读者已经获得了集合、两种运算、封

闭、满足八条性质这些有关信息, 但有些信息如那八条性质并不明确, 在随后的理论阐述中就可以给出这个概念的完整的、严格的、一般的定义。之后再举出更多的其它方面的典型例子, 从而使读者明白这是一个广泛的重要概念, 也起到加深理解的作用。在这种阐述方式中, 背景问题为概念的学习提供了一个具体的原型, 而一般的定义则是进一步的深化与提高。同时对于其中的一些结论也可以这样处理。在解决背景问题时提到某些结论, 比如方程组(1)的解集关于加法及数乘运算是封闭的; 从方程组(1)到方程组(2)是同解变形; 方程组(1)中的各方程不是独立的等结论, 要等到理论阐述阶段才给出详细的论证。

对背景问题的处理须注意: 提出的问题要具体、简明, 解决的方法要明确、思路清晰, 但有些地方要概略, 不拘泥于细节。以这种方式来安排教学内容是为了得到一种平衡: 既发挥了背景问题的启发作用, 又能够集中笔墨展开理论体系, 从而避免二者的纠结所带来的叙述上的混杂。

## 2 加强应用

数学知识一般起源于个别背景问题, 一旦发展出系统理论, 往往能找到广泛的应用。为了让学生了解数学的这一特点, 激发学习兴趣, 培养应用型人才, 需要加强应用环节的教学。

### 2.1 应用的广泛性

数学的应用极为广泛。人们常将数学分为纯数学和应用数学。二者并非泾渭分明, 却有着紧密的联系。没有坚实的纯数学理论, 应用数学也难发挥应有的作用, 纯数学理论作为基础和工具的作用毋庸置疑。应用数学研究的客观问题又给纯数学的发展提供动力和刺激<sup>[4]</sup>。二者存在着密切的相互作用。另一方面, 随着时间的推移, 纯数学也会找到应用的舞台。比如黎曼几何创立几十年后应用于广义相对论而大受重视; 再比如数论这个一向被看做典型的纯数学门类, 近些年来, 由于被应用于密码学而改变了人们的看法。再者, 一直以来生物学、化学及一些社会科学和数学极少发生联系, 但随着研究的不断深入, 需要用到深刻的数学理论。

《高等代数》作为数学的基础理论被广泛应用于工程学、计算机科学、物理学、生物学、经济学等领域。仅举几例, 以窥全豹。线性方程组的理论被应用于建立经济学中的“列昂惕夫投入—产出模型”; 配平化学方程式; 研究城市道路交通、电路及商品销售中的网络流问题。矩阵的理论方法被应

用于计算机绘图、数值分析、量子力学等。线性空间更是一个十分广泛的概念,包括三维向量空间、线性微分方程的解空间、工程学上的离散时间段上的信号函数空间等。根据有关矩阵的特征值的符号,借助于微分方程理论,可以判定一些运动状态的稳定性。现在来简要介绍一个矩阵特征值在生态学中的应用实例。

在1990年的美国,对于是否使用太平洋西北岸茂密森林中的木材,人们展开了广泛的争论,焦点是会不会导致当地斑点猫头鹰的灭绝。在一些观察数据的基础上建立了一个数学模型

$$\begin{bmatrix} j_{k+1} \\ s_{k+1} \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{bmatrix} \quad k=0,1,2K$$

其中 $j_k, s_k, a_k$ ,分别表示第 $k$ 年猫头鹰幼鸟期、成长和成熟期的数量。这里给出了一个式子,是一个形如

$$x_{k+1}=Ax_k$$

的差分方程,通过逐步代入得到

$$x_k=A^k x_0$$

猫头鹰是否灭绝就是下式是否成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k=0$$

由于 $A$ 的特征根的绝对值均小于1,利用特征向量将 $A$ 对角化得 $B$

$$P^{-1}AP=B \quad A^k=PB^kP^{-1} \rightarrow 0(k \rightarrow \infty)$$

从而有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_0 = 0$$

可见猫头鹰会灭绝。

## 2.2 加强应用的原因

《高等代数》是一个应用广泛的学科,适当地选编一些实际应用的内容,是为了展现《高等代数》的本来面貌,消除人们由于缺乏了解而产生的偏见,提高学习的热情,推动其应用。

加强《高等代数》应用的教学是培养应用型人才的需要。应用能力只能在运用知识解决实际问题的实践中培养。对于大多数学生来说,学习数学的一个重要目的就是运用数学的理论、思想、方法去解决生活、生产中遇到的实际问题。近年来,无论大学还是中小学都在大力倡导、推进培养学生的

### 注释及参考文献:

- [1]李尚志.线性代数[M].北京:高等教育出版社,2006.
- [2]David C.Lay.线性代数及其应用[M].北京:人民邮电出版社,2007.
- [3]希尔伯特.数学问题[M].大连:大连理工大学出版社,2009:41-42.
- [4]阿蒂亚.数学的统一性[M].大连:大连理工大学出版社,2009:172.

应用能力。每年一度的全国大学生数学建模竞赛就是一个明证。学校开设的数学建模课程是一种集中训练的形式,但是应用能力的培养还应该贯穿于每门数学课程的教学之中。

欧拉、高斯、庞加莱等数学大家的数学研究都有着深刻的应用背景。希尔伯特说过:在每个数学分支中,那些最初、最老的问题肯定是起源于经验,是由外部的现象世界所提出<sup>[1]</sup>。可见,解决实际问题,是数学发展的强大推动力。希尔伯特及阿蒂亚等人也强调:思维与经验经常反复出现的相互作用才能保障数学研究的健康发展<sup>[3]</sup>。因此关注应用是培养创新型人才的必然要求。

## 2.3 怎样编排应用性的内容

应用内容的编写可以采用例题、习题、扩展阅读材料等形式。

例题应该选取典型的应用问题,经过“分析→建立数学模型→运用所学理论方法求解→和实际情况相对照”的过程,具体示范数学的应用。

尝试解决实际问题培养应用能力不可缺少的环节。习题适当编入难度上有梯度的应用问题,对于学生形成应用意识、发展兴趣、提高实践能力都是有益的。

扩展阅读材料可附于一节或一章之后,也可以独立成节。要能较为全面地、概括地介绍所学内容在各方面的应用及与其它相关学科的联系。使学生读后对于有关应用问题有一个全面、概略的了解,明确数学的流向。

应用内容的编写还要考虑与学生的专业方向相结合,使教材内容更有针对性,实现教材的多元化。

## 3 结语

在数学教学上,教学内容的精确性与非形式化的适当结合是一种合理的状态,打破这种平衡,就会带来困难。

数学发展的推动力一个来自于外部(客观现象世界),一个来自于内部(内部的矛盾运动)。如果偏向于后者,很难保障数学的健康发展。在教学过程中,如果仅强调抽象的公理化体系,忽视客观问题的作用,忽视应用,忽视和其它相关学科的联系,都不符合数学发展的历史,也不符合教学规律。

**注释及参考文献:**

- [1] 建设部. 建筑行业职业技能标准[M]. 北京: 中国计划出版社, 1996: 25-29.
- [2] 程建芳. 借鉴国外经验强化应用型本科教育实践教学[M]. 中国高教研究, 2007: 13-15.
- [3] 袁慧. 新形势下培养提高工科学生工程实践能力的认识与实践[M]. 高教探索, 2007: 32-35.
- [4] 袁夏炜. 浅谈构建高校工科实践教学新体系[M]. 科技文汇, 2007: 12-13.
- [5] 石磊. 工程教育中实践能力的培养研究[J]. 西安电子科技, 2007: 6-8.
- [6] 杨安蓉. 土木工程本科生工程能力培养模式的探索与实践[J]. 理工高教研究, 2002, 21(1): 12-22.
- [7] 郑爱武. 土木工程专业学生工程设计培养模式探讨[J]. 建筑科技与管理, 2010(第): 12-13.

## Study on the Development of the Professional Qualities of Civil Engineering Majors

WANG Zhuo-ying, YU Bin

(Xichang College, Xichang, Sichuan 615013)

**Abstract:** Along with the market economy system unceasing consummation, the society requests much highly of the civil engineering specialized student. In view of the problems in developing students' specialized skills, this paper takes the counter measures to strengthen training of student's specialized skills, so that to enable the student to have certain specialized skill quality.

**Key words:** Professional; Skill quality; Development; Study

---

(上接 125 页)

- [5] 布尔巴基. 数学的建筑[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2009: 74.
- [6] 吴文俊. 关于研究数学在中国的历史与现状[J]. 自然辩证法通讯, 1990(4): 37-39.

## Reforming the Content of High Algebra by Tracing the Source and Course

LU Xi-zhuang

(Department of Physics and Chemistry, Bozhou Teachers College, Bozhou, Anhui 236800)

**Abstract:** In order to train applied, creative talents, and to transform the higher algebra abstract content from academic form into education form, two aspects are discussed about the reform of high algebra content; one is to put forward a background problem at first, and then introduce theory system in the course of solving background problem; the other is to strengthen the application, so that the ins and outs of high algebra content are made more clear, and the quality of teaching is improved.

**Key words:** High algebra; Background problem; Formalization; Application