几类利用灵活换元法求解的定积分

王玉兰
（无锡科技职业技术学院,江苏 无锡 214028）

【摘　要】利用定积分上、下限的特殊性,通过适当换元,将对被积函数为f(x)的定积分转化为对被积函数为$f(x)+f_1(x)$的定积分,从而使得一些定积分的计算过程得以简化。

【关键词】定积分;积分上限;积分下限
【中图分类号】O172.2　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2011)03-0029-02

在计算定积分时常用的方法就是牛顿——莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式。当然换元积分法和分部积分法也是定积分计算的两种十分重要的方法。换元积分法在使用时非常灵活,亦无典型特点。一般是根据所给被积函数在积分时的困难所在,选择适当的变量替换,转化成便于求积的形式。本文归纳了几类利用换元积分法求解的定积分。主要是利用定积分上、下限的特殊性,巧妙换元,使其换元后积分上、下限保持不变,再利用两式相加处理求积分。

一、形如$I=\int_a^b f(x)dx$,其中$a=\frac{1}{b},(b\neq 0)$的定积分。方法:令$x=\frac{1}{t}$,整理得$I=\int_a^b f_1(x)dx$,则$2I=\int_a^b[f(x)+f_1(x)]dx$,$I=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f_1(x)]dx$。

例1 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^p)(1+x^2)}dx$

分析:例1积分上、下限互为倒数,利用换元所得积分上、下限与原题相同,可利用积分性质,将两个积分相加处理求解。

解:令$x=\frac{1}{t}$,即$dx=-\frac{1}{t^2}dt$

则

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^p)(1+x^2)}dx=\int_{+\infty}^0\frac{1}{(1+\frac{1}{t^p})(1+\frac{1}{t^2})}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^p}{(1+t^p)(1+t^2)}dt$$

所以

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^p)(1+x^2)}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{(1+x^p)(1+x^2)}dx$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

即$I=\frac{\pi}{4}$。

小结:此类问题在换元的时候一定要注意积分变量的换元,以免出错。

二、形如$I=\int_{-a}^a f(x)dx$,其中f(x)在关于原点对称的区间[-a,a]是可积的定积分。对于此类积分,当f(x)在[-a,a]上为奇函数或是偶函数时,均有相应的简便运算。本文考虑当f(x)在[-a,a]上既不是奇函数也不是偶函数时的情形。方法:令x=-t,整理得$I=\int_{-a}^a f(x)dx$,则$2I=\int_{-a}^a[f(x)+f(-x)]dx$,

$$I=\frac{1}{2}\int_{-a}^a[f(x)+f(-x)]dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$$

特别地,当f(x)在[-a,a]上为奇函数时,

$$I=\frac{1}{2}\int_{-a}^a[f(x)+f(-x)]dx=0;$$

当f(x)在[-a,a]上为偶函数时,

$$I=\frac{1}{2}\int_{-a}^a[f(x)+f(-x)]dx$$
$$=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx=2\int_0^a f(x)dx$$

例2 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$

分析:例2、例3积分上、下限互为相反数,利用换元所得积分上、下限与原题的相同,可利用积分性质,将两个积分相加处理求解。

解:令x=-t,即dx=-dt

$$则I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}]dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin^2 x}dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2$$

例3 $I=\int_{-1}^1\frac{1}{(e^x+1)(1+x^2)}dx$

解:令x=-t,即dx=-dt

$$则I=\frac{1}{2}\int_{-1}^1[\frac{1}{(e^x+1)(1+x^2)}+\frac{1}{(e^{-x}+1)(1+x^2)}]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\arctan x|_{-1}^1=\frac{\pi}{4}$$

小结:此类问题的积分变量换元时有负号出现,计算时应注意。

三、形如$I=\int_0^b f(x)dx$的定积分。方法:令t=b-x,整理得$I=\int_0^b f(b-x)dx$,则$2I=\int_0^b f(x)dx+\int_0^b f(b-x)dx$,$I=\frac{1}{2}[\int_0^b f(x)dx+\int_0^b f(b-x)dx]$。

例4 $I=\int_0^\pi\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx$

分析:例4、例5积分上、下限,利用巧妙的换元方法所得积分上、下限与原题的相同,可利用积分性质,将两个积分相加处理求解。

收稿日期:2011-08-02
作者简介:王玉兰(1982-　),女,江苏无锡人,助教,主要从事高等数学研究工作。

解:令t=π-x,即dx=-dt

则 $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}+\frac{(\pi-x)\sin^{2n}(\pi-x)}{\sin^{2n}(\pi-x)+\cos^{2n}(\pi-x)}]dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx$

其中 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx\overset{令x-\frac{\pi}{2}=t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx$

所以 $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx=\frac{\pi^2}{4}$

例5 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

解:令 $t=\frac{\pi}{4}-x$,即dx=-dt

则

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln(1+\tan x)+\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x))]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln(1+\tan x)+\ln(\frac{2}{1+\tan x})]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

小结:上述两题中积分不易求,通过适当换元后积分易求。总之,当f(x)+f(b-x)的积分易求时,即可应用上述变换公式求积分。

定积分的换元积分法使用灵活多样,适当的换元都有自己的特点。本文所归纳的几类积分换元,除了上、下限具有特殊性外,被积函数本身是相对比较复杂的有理式或三角函数式。所以读者只有在解题中不断积累经验,针对具体问题,对症下药,才能取得较好的效果。

注释及参考文献:

[1]同济大学等.高等数学(上册)[M].北京:高等教育出版社,2001.

[2]陈仲.高等数学竞赛题解析[M].南京:东南大学出版社,2008.

[3]钱昌本.高等数学解题过程中的分析和研究[M].北京:科学出版社,2005.

Several Types of Definite Integrals Using the Flexible Substitutions Methods

WANG Yu-lan

(*Wuxi Technology and Professional College, Wuxi, Jiangsu 214028*)

Abstract: By using the specialities of integral limits and some types of definite integrals for integrated function, the f(x) can be transformed to be f(x)+f_1(x) through suitable substitutions which make some of the definite integral's calculation process simple.

Key words: Definite integral; Integral limit; Points lower