一类迭代方程的单调递减解

辛邦颖
(西昌学院,四川 西昌 615022)

【摘 要】本文讨论多项式型迭代方程$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$在F(x)单调递减,没有端点限制情形下的单调递减的连续解及唯一解。

【关键词】迭代方程;连续解;单调递减解
【中图分类号】O175.7 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2011)03-0027-02

1 引言

迭代是一种运算,而以此运算得到的方程称为迭代方程,其一般形式是

$$G(f(x),f^2(x),\cdots,f^n(x))=F(x),\ \forall x\in I=[a,b] \quad (1)$$

其中f^i是f的i次迭代,且有$f^0(x)=x$。当G是线性函数时,(1)成为

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x),\ \forall x\in I=[a,b]^{[1-2]} \quad (2)$$

关于方程(2)的特殊形式$f^2(x)=af(x)+(1-a)x$及$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)=F(x)$的解的讨论分别在1977年和1983年得到解决,但对n次迭线性方程,直到1986年才得以解决[3]。此后,关于方程(2)的各类正则解已有大量的研究结果[4-8]。接着,方程(2)在保持端点不变情形下的凸解和连续单调递减解也被讨论[9]。在上述工作的启发下,笔者讨论了方程(2)在没有端点限制,单调递增情形下连续解的存在性、唯一性和凸性,接着讨论了变系数多项式迭代方程在没有端点限制情形下连续解的存在性、唯一性和凸性。本文接着讨论方程(2)在没有端点限制,系数满足$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, $\lambda_1>0$, $\lambda_{2i}\geqslant 0$, $\lambda_{2i+1}\leqslant 0$, i=2,3⋯,n,F(x)单调递减情形下连续解的存在性和唯一性。

2 解的存在性

对一般的线性迭代方程(2),设

(H_1):$\lambda_1>0$, $\lambda_{2i}\geqslant 0$, $\lambda_{2i+1}\leqslant 0$, i=2,3⋯n,且有$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$或者$\lambda_1=1$, $\lambda_i=0$, i=2⋯n。

(H_2):$\lambda_1 a\leqslant a-\sum_{偶数}\lambda_i b-\sum_{奇数i\neq 1}\lambda_i a\leqslant b-\sum_{偶数i}\lambda_i a-\sum_{奇数i\neq 1}\lambda_i b\leqslant\lambda_1 b$

并采用记号:C(I,I)={f(x)|f(x)为定义在[a,b]上连续实函数的全体},

$$C(I,m,M)=\left\{f(x)\in C(I,I), m\leq\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq M,\right.$$
$$\left. m\leq M\ \leq 0,\forall x_1,x_2\in I且x_1>x_2\right\}$$

引理2.1[2] C(I;m,M)是C(I,I)上的一个紧凸子集。

引理2.2[2]若m<M<0,f(x),g(x)∈C(I,m,M),则

$$\|f^n-g^n\|\leqslant\sum_{j=0}^{n}M^j\|f-g\|,\ n=1,2,\cdots。$$

引理2.3[9]令f∈C(I;m,M),其中m⩽M⩽0,则有$f^{2i}\in C(I;m^{2i},M^{2i})$,$f^{2i+1}\in(I;m^{2i+1},M^{2i+1})$。

定理2.1 若方程(2)满足条件(H_1)和(H_2),F∈C(I,$-M_1$,0),且存在M_1满足:

$$\lambda_1\xi<\sum_{奇数i\neq 1}\lambda_i\xi^i-\sum_{偶数}\lambda_i\xi^i-M_1,$$

则方程(1)存在单调递减的连续解f(x)∈C(I,−ξ,0),其中ξ为大于零的任意常数。

证明:构造映射L:C(I,−ξ,0)→C(I),使得

$$Lf(x)=\frac{F(x)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_n},\ \forall f\in C(I,-\xi,0)$$

由条件(H1)、(H2)和引理2.3知

$$Lf(x)=\frac{F(x)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_n}\geq\frac{a-\sum_{偶数i}\lambda_i b-\sum_{奇数i\neq 1}\lambda_i a}{\lambda_1}\geq a$$

$$Lf(x)=\frac{F(x)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_n}\leq\frac{b-\sum_{偶数i}\lambda_i a-\sum_{奇数i\neq 1}\lambda_i b}{\lambda_1}\leq b$$

因此a⩽Lf(x)⩽b对一切x∈I成立。

对I上任意两点x,y∈I,x>y,有

$$Lf(x)-Lf(y)=\frac{F(x)-F(y)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i f^i(x)-\sum_{i=2}^{n}\lambda_i f^i(y)}{\lambda 1}\leq 0$$

$$Lf(x)-Lf(y)=\frac{F(x)-F(y)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i f^i(x)-\sum_{i=2}^{n}\lambda_i f^i(y)}{\lambda 1}$$
$$\geq(\frac{-M_1}{\lambda_1}+\frac{\sum_{奇数i\neq 1}\lambda_i\xi^i-\sum_{偶数i}\lambda_i\xi^i}{\lambda_1})(x-y)$$
$$\geq-\xi(x-y)$$

对∀f,g∈C(I,−ξ,0)有

$$\|Lf-Lg\|=\left\|\frac{F(x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_1}-\frac{F(x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g^i(x)}{\lambda_1}\right\|$$
$$=\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g^i(x)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_1}\right\|=\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g^i(x)-f^i(x)}{\lambda_1}\right\|$$
$$=\max_{\forall x\in I}\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g^i(x)-f^i(x)}{\lambda_1}\right|$$
$$\leq\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=2}^{n}|\lambda_i|\sum_{j=0}^{i-1}M^j\|f-g\| \quad (3)$$

从而L是C(I,−ξ,0)上的连续自映射。由引理2.1知C(I,−ξ,0)是C(I,I)上的紧凸子集,由Schauder's不动点定理知存在f(x)∈C(I,−ξ,0),使

收稿日期:2011-07-10
作者简介:辛邦颖(1972-),女,四川冕宁人,副教授,硕士,主要研究方向为微分方程与动力系统。

得Lf(x)=f(x),即:

$$Tf(x)=\frac{F(x)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x)}{\lambda_1}=f(x)$$

或者$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$。

定理得证。

定理2.2 设方程满足定理2.1的的条件,且有

$\lambda_1>\sum_{i=2}^{n}|\lambda_i>|\sum_{j=1}^{i-1}M^j$

则方程(2)存在唯一解f(x)∈C(I,-ξ,0)。

证明:由定理2.1的条件和(3)式,存在0<δ<1,使得

$$\|Lf-Lg\|\le\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=2}^{n}|\lambda_i|\sum_{j=0}^{i-1}M^j\|f-g\|<\delta\|f-g\|$$

由 Banach 不动点定理知方程(2)有唯一解f(x)∈C(I,-ξ,0)。

注释及参考文献:

[1]张伟年.动力系统基础[M].北京:高等教育出版社,2001.

[2]张景中,杨路,张伟年.迭代方程与嵌入流[M].上海:上海科技教育出版社,1997.

[3]张伟年.关于迭代方程$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$解存在性讨论[J].科学通报,1986,31(17):1290-1295.

[4]J.Matkowski,W.Zhang.On linear dependence of iterates[J].J.Appl.Anal.6(2000)149-157.

[5]S.Nabeya.On the functional equation f(p+qx+rf(x))=a+bx+cf(x)[J].Aequationes M-Ath.1974,11:199-211.

[6]W.Zhang,K.Nikodem,B.Xu.Convex solutions of polynomial-like iterative equation[J].J.Math. A nal A ppl.2006,315:29-40.

[7]赵立人.关于函数方程$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)=F(x)$解的存在唯一性定理[J].中国科技大学学报(数学专辑),1998:21-27.

[8]司建国 Discussion on the Cr-solutions of the iterated equation $\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)=F(x)$[J].Acta Math Sci,1994,14:53.

[9]B.Xu,W.Zhang.Decreasing solutions and convex solutions of the polynomial-like iterative equation[J].J.Math. A nal. A ppl.2006:1-15.

[10]辛邦颖,徐娟.一类多项式型迭代方程连续解的存在性[J].四川大学学报,2009,46(4):897-900.

[11]辛邦颖.变系数多项式型迭代方程单调递增解和凸解[J].四川师范大学学报,2010,33(4):474-478.

Decreasing Solutions of the Polynomial-like Iterative Equation

XIN Bang-ying

(Xichang College, Xichang, Sichuan 615022)

Abstract: In this paper we prove the existence and uniqueness of decreasing solution for the polynom polynomial-like iterative equation $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$ and F(x) is continuous decreasing without endpoint-fixed restriction.

Key words: Iterative equation; Eontinuous solutions; Decreasing solution