

几类平面图的集合色数

王艳丽

(中国矿业大学 理学院, 江苏 徐州 221116)

【摘要】设 G 是非平凡连通图, 记 $c: V(G) \rightarrow N$ 是 G 的一个顶点染色, 这里相邻的两个顶点可以着相同的颜色。对于图 G 的任一顶点 v , 与 v 相邻的顶点所着颜色的集称为邻色集, 记 $NC(v)$ 。如果 G 中任意相邻的两个顶点 v, u 满足 $NC(u) \neq NC(v)$, 则称 c 是 G 的一个集合染色。集合染色所需的最少的颜色数称为 G 的集合色数, 记 $\chi_s(G)$ 。本文给出了团数是3的平面图, 没有4圈的平面图及烟花图和风车图的集合色数。

【关键词】平面图; 团数; 集合色数; 烟花图; 风车图

【中图分类号】O157.5 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2011)02-0023-02

引言

文中考虑的图都是简单无向有限图。如果一个图能画在平面上使得它的边仅在端点处相交, 则称这个图为可嵌入平面的, 或称为平面图。给定图 G , 分别用 $V(G)$ 、 $E(G)$ 表示 G 的顶点集、边集。对图 G 中任意顶点 v , 分别用 $d(v)$ 、 $N(v)$ 表示 v 的度数、邻点的集合。图 G 的色数 $\chi(G)$ 是指对图 G 的顶点进行染色, 使得任意两个相邻的顶点染不同颜色所需要的最少的颜色数。设 c 是图 G 的一个顶点染色, 若 G 中任意相邻的两个顶点 u, v , 满足 $NC(u) \neq NC(v)$, 则 c 是图 G 的一个集合染色, 集合染色所需的最少的颜色数称为 G 的集合色数, 记 $\chi_s(G)$ 并且 $\chi_s(G) \leq \chi(G)$ 可参见文献[1]。简单图 G 的一个团是指 V 中的一个子集 S , 使得 $G[S]$ 是完全图, 若不存在团 S' 使得 $|S'| > |S|$ 则称 $|S|$ 为 G 的团数, 记为 $W(G)$ 。文中相关的一些定义及符号可参见文献[2]。

1 主要引理

引理1^[1] 若 G 是非空二部图, 则 $\chi_s(G)=2$ 。

引理2^[1] 对任意图 G 有 $\chi_s(G) \geq 1 + \lceil \log_2 W(G) \rceil$ 。

引理3^[2] 若 G 是 k 临界图, 则 $k \geq \delta - 1$ 。

引理4^[3] 若 G 是没有四圈的平面图, 则 $\delta(G) \leq 4$ 。

2 主要结论及证明

定理1 若 G 是平面图且 $W(G)=3$, 则 $\chi_s(G)=3$ 。

证 由引理2知

$$\chi_s(G) \geq 1 + \lceil \log_2 W(G) \rceil = 1 + \lceil \log_2 3 \rceil = 3 \quad (1)$$

下面证明 $\chi_s(G)=3$ 。首先证明 $\chi(G)=3$ 。设 H 是 G 的团数为3的团, $c: V(H) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 是 H 的一个3顶点着色, 因为 $W(G)=3$, 所以对任意的顶点 $v \in V(G) \setminus V(H)$ 至多与 H 中的两个顶点相邻, 令 $c(v) = \{1, 2, 3\} - NC(v)$, 若 $NC(v)=1$, 则 $c(v)$ 选 $\{1, 2,$

$3\} - NC(v)$ 其中之一, 并保证对任意相邻的两点 u, v 有 $c(u) \neq c(v)$, 依此种规则给 G 的每个顶点染上颜色, 显然这种染色肯定存在, 并且是 G 的正常顶点染色, 又因为 $\chi(G) \geq W(G)=3$, 故 $\chi(G)=3$ 而 $\chi_s(G) \leq \chi(G)=3$, 结合(1)式有 $\chi_s(G)=3$ 。

事实上, 这个定理的条件不是必要的, 例如5圈, 其集合色数是3, 但其团数是2。另外, 若 G 是不包含 K_4 的平面图, 则 G 是3集合可着色的。这是因为若 G 是不包含 K_4 的平面图, 则 G 中的团数至多为3, 所以由定理1可知 $\chi_s(G) \leq 3$ 。由此定理可以知道轮图和扇形图的集合色数都是3, 相关定义可参见文献[5]。

1958年, Grotzsch证明了每个没有三角形的平面图都是3顶点可着色的, 参见文献[4], 则显然每个没有三角形的平面图都是3集合可着色的, 并且这个界是可以达到的, 例如除三圈外的所有奇圈。

没有4圈的平面图都是4集合可染色的吗? 答案显然, 因为有四色定理知每个平面图都是4顶点可着色的, 那么自然是4集合可着色的, 下面抛开四色定理来证明没有4圈的平面图都是4集合可染色的。首先证明没有4圈的平面图都是4顶点可染色的。

定理2 没有4圈的平面图都是4顶点可染色的。

证用反证法。假设定理不成立, 则存在一个5临界平图 G , 则有引理4知 $\delta(G) \leq 4$, 另一方面, 由引理3有 $\delta(G) \geq 4$, 所以 $\delta(G)=4$ 。设 v 是 G 中的一个4度顶点, 因为 G 是5临界的, 所以 $G-v$ 一定存在一个正常4顶点着色, 设 (V_1, V_2, V_3, V_4) 是 $G-v$ 的一个正常4顶点着色, 由于 G 本身不是4顶点着色的, 所以 v 必须和染有这4种颜色中的每一种颜色的顶点相邻, 所以可以假定 v 的邻点沿着 v 的顺时

针方向是 v_1, v_2, v_3, v_4 , 这里 $v_i \in V_i, 1 \leq i \leq 4$ 。

用 G_{ij} 表示由 $V_i \cup V_j$ 导出的子图 $G[V_i \cup V_j]$, 于是 v_i 和 v_j 一定属于 G_{ij} 的同一个分支。因为若不然, 考虑 G_{ij} 的一个包含 v_i 的分支。在这个分支中交换颜色 i 和 j , 得到 $G-v$ 的一个新的正常 4 顶点着色, 其中只有三种颜色 (因为不包含 i) 分配给 v 的邻点, 然而由前面的叙述可知这种情形不可能发生。所以, v_i 和 v_j 一定属于 G_{ij} 的同一个分支。设 P_{ij} 是 G_{ij} 中的 (v_i, v_j) 路, 并将圈 $v_1 v_2 P_{13} v_3 v_4$ 记为 C 。见图 1。

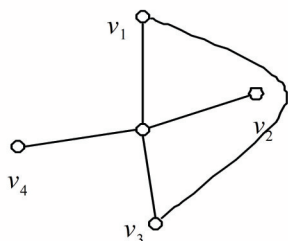


图1 没有4圈的平面图

由于 C 分隔 v_2 和 v_4 , 因为在图中 $v_4 \in \text{int}C$ 而 $v_4 \in \text{ext}C$ 由 Jordan 曲线定理可知, 路 P_{24} 必然和 C 相遇于某一点。因为 G 是平面图, 所以这个点必然是顶点, 但这是不可能的, 因为 P_{24} 的顶点被染颜色 2 和 4, 而 C 的顶点不具有这两种颜色。这就产生了矛盾。从而, 定理得证。

既然没有 4 圈的平面图都是 4 顶点可染色的, 那么显然没有 4 圈的平面图都是 4 集合可染色的, 并且此上界是可达到的, 例如 K_4 , 由文献[1]可知 $\chi(K_4)=4$ 。

3 烟花图和风车图的集合色数

在圈 $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 的每个顶点 v_i 上增加一条悬挂边 $v_i v_{i+1} (i=1, 2, \cdots, n)$, 得到图 $Y_n^{(1)}$, 在每个顶点 v_i 上再增加一条悬挂边 $v_i v_{i+2} (i=1, 2, \cdots, n)$, 得到图 $Y_n^{(2)}$... 第 k 次 (k 可任意大) 增加悬挂边 $v_i v_{i+k} (i=1, 2, \cdots, n)$, 得到图 $Y_n^{(k)}$... 这样, 得到一系列的烟花图 $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \cdots, Y_n^{(k)}$ 。

注释及参考文献:

- [1] Ping Zhang, The set chromatic number of a graph[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 29(2009): 543-561.
- [2] 邦迪. 图论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
- [3] Yufa Shen, Structural properties and edge choosability of planar graphs without 4-cycles[J]. Discrete Mathematics, 308(2008): 5789-5794.
- [4] G. Grotzsch, H. Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math-Nat. Reihe, 9(1959): 109-19.
- [5] 王维凡, 刘家壮. 平面图的点面全染色[J]. 师范大学学报, 1993(2): 120-124.

定理3 若 $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 为偶圈时, $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \cdots, Y_n^{(k)}$ 的集合色数为 2, 若 $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 为奇圈时, $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \cdots, Y_n^{(k)}$ 的集合色数为 3。

证若 $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 为偶圈时, 这时我们可以用标号法判断出 $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \cdots, Y_n^{(k)}$ 是二部图, 标号规则如下 $\begin{cases} i \equiv 1 \pmod{2}, v_i = 1 \\ i \equiv 2 \pmod{2}, v_i = 2 \end{cases}$ 而 $v_{i+1} (i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots)$ 染与 v_i 相反的颜色, 再由引理 1 可知 $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 的集合色数为 2。

若 $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 为奇圈时, 显然 $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \cdots, Y_n^{(k)}$ 的色数是 3, 所以, $\chi_s(G) \leq \chi(G)=3$, 下面证明 $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \cdots, Y_n^{(k)}$ 的集合色数是 3。反证法, 假设 $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \cdots, Y_n^{(k)}$ 的集合色数是 2, $c: V(G) \rightarrow \{1, 2\}$ 是 G 的一个 2 集合着色, 在 $C_n = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ 的顶点中必有两个相邻的顶点着相同的颜色, 假定 $c(v_1)=c(v_2)=1$, 因为 $\{1, 2\}$ 的非空子集只有三个故这两个顶点的邻色集中必含有 1, 且分别为 $\{1\}, \{1, 2\}$ 现在考虑邻色集为 $\{1\}$ 的点, 假定为 v_i , 则与 v_i 相邻的顶点 v_{i+1} 必着色 1, 这样 $NC(v_{i+1})=NC(v_i)=1$, 与 c 是 $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \cdots, Y_n^{(k)}$ 的集合染色矛盾, 故 $Y_n^{(1)}, Y_n^{(2)}, \cdots, Y_n^{(k)}$ 的集合色数是 3。

在圈 $C_{2n} = v_1 v_2 \cdots v_{2n-1} v_{2n} v_1$, $n \geq 2$ 的每个顶点 v_i 上增加悬挂边 $v_i u_i (i=1, 2, \cdots, 2n)$ 再加边 $u_i u_{i+1}, i \equiv 1 \pmod{2}$, 得到风车图 W_{2n}^* 。

定理4 $\chi_s(W_{2n}^*)=2$ 。

证明: 下面按照如下规则给出 W_{2n}^* 的一个 2 集合染色: $c: V(W_{2n}^*) \rightarrow \{1, 2\}$, 选择任意一个顶点 v_i , 以这个顶点为起点按照顺时针方向依次给所有的顶点交替的着色 1, 2。容易证明 c 是 W_{2n}^* 的一个 2 集合染色。因为 W_{2n}^* 中所有的圈都是偶圈, 故圈 C_n 和圈 $v_i u_i u_{i+1} v_{i+1} (i=1, 2, \cdots, 2n)$ 上的顶点也是以顺时针方向交替的着色 1, 2, 因此两个相邻顶点的邻色集分别为 $\{1\}$ 或 $\{2\}$ 。又因风车图 W_{2n}^* 显然不是 1 集合可染色的, 从而 $\chi_s(W_{2n}^*)=2$ 。

[16]国家环保局《水和废水监测分析方法》编委会编.水和废水监测分析方法[M].北京:中国环境科学出版社,2005.

The Study of Wet Plants' Ability to Remove Pollutants in Qionghai Lake

CHEN Ming-dong, ZHU Hai-feng, XIE Yang, DONG Xiao-wan, CHEN Chen, WANG Shan-yi
(School of Agricultural Science, Xichang College, Xichang, Sichuan 615013)

Abstract: Region III of Qionghai Lake was chosen as representative region to study. By investigating the wetland plants and comparing the water quality of the samples which were taken from wetland and Haihe River mouth close to it. It was found that the quality of water with wet plants and close to Haihe River mouth was much better than the water which was collected at the site far away from wet plants in the center of the lake. This experiment shows that wet plants do have the ability to wipe off some pollutants. Therefore, in order to use minimum cost to make maximum returns, we should attach more importance to protect natural wetlands to build more constructed wetlands.

Key words: Qionghai lake; Water subarea; Wetland plants; Pollutants

(上接 22 页)

symmetric matrices. Through the properties of this kind of matrixes, the solvable conditions and the general solution of the inverse problems are given, which not only proves the existence and uniqueness of the Least-square Solution, but also derived the expression of the solution.

Key words: Symmetric matrices; Least-square solution; Inverse problem; Optional approximation

(上接 24 页)

(College of Sciences, China University of Mining & Technology, Xuzhou, Jiangsu 221116)

Abstract: For a nontrivial connected graph G , let $c: V(G) \rightarrow N$ be a vertex coloring of G where adjacent vertexes may be colored the same. For a vertex v of G , the neighborhood color set $NC(v)$ is the set of colors of the neighbors of v . The coloring c is called a set coloring if $NC(v) \neq NC(u)$ for every pair u, v of adjacent vertexes of G . The minimum number of colors required of such a coloring is called the set chromatic number $\chi_s(G)$ of G . This paper gives the set chromatic numbers of some planar graphs, which contain the planar graphs of its clique number is 3, the planar graphs without 4-cycles, fireworks graphs and windmill graphs.

Key words: Planar graphs; Clique number; Chromatic number; Reworks graph; Windmill graphs