一类实对称矩阵反问题的最小二乘解*

张宗标[1,2]

(1.南京航空航天大学 理学院,江苏 南京 210016;2.亳州师专 理化系,安徽 亳州 236800)

【摘 要】本文讨论一类实对称矩阵反问题及其最佳逼近。通过这类矩阵的一些性质给出了反问题解存在的条件和解的一般表达式,不仅证明了最小二乘解的存在唯一性,而且给出了这个解的具体表达式。

【关键词】对称矩阵;最小二乘解;反问题;最佳逼近

【中图分类号】O151.21 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2011)02-0021-02

1 引言

矩阵反问题在结构动力学、分子光谱学、量子力学、结构设计、参数识别和自动控制等领域都有重要应用。自1956年Downing和Householder首次提出矩阵特征值反问题以来,特别是近二十年来,由于实际的需要,矩阵反问题已经成为当今计算数学中一个非常活跃的研究课题,并且取得了许多有意义的成果[1-6]。而关于实对称矩阵反问题的最小二乘解问题,现阶段研究较少,本文将就这个问题进行探讨,具体表述如下:

问题Ⅰ:给定$X\in R^{n\times m}$,$B\in R^{m\times m}(m\leqslant n)$,求$A\in SR^{n\times n}$,使得

$$\|X^TAX-B\|=\min \tag{1}$$

问题Ⅱ:$\tilde{A}\in R^{n\times n}$,求$\hat{A}\in S_E$,使得

$$\|\tilde{A}-\hat{A}\|=\inf_{A\in S_E}\|A-\tilde{A}\| \tag{2}$$

笔者首先给出问题Ⅰ解集合S_E的通式,最后证明问题Ⅱ的解存在且唯一,并给出解的表达式。

为了叙述方便引入一些记号:令$R^{n\times m}$表示所有$n\times m$实矩阵集合;$SR^{n\times n}$为n阶实矩阵全体;$OR^{n\times n}$表示所有n阶正交矩阵全体;A^+表示A的Moore-Penrose广义逆;rank(A)表示A的秩;对$A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$,$A*B=(a_{ij}b_{ij})$表示矩阵A与B的Hadamard乘积;在$R^{n\times m}$上定义A与B的内积$(A,B)=rt(B^TA)$,由此内积导出的范数$\|A\|=\sqrt{(A,B)}=\sqrt{tr(B^TA)}$为矩阵的Frobenius范数。

2 问题Ⅰ解的表达式

设$X\in R^{n\times m}$的奇异值分解为

$$X=U\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^T \tag{3}$$

其中$U=(U_1,U_2)\in OR^{n\times n}$,$V=(V_1,V_2)\in OR^{n\times m}$,$U_1\in R^{n\times r}$,$V_1\in R^{m\times r}$,r=rank(X),$\Sigma=diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)>0$。

引理1:设$F\in R^{r\times r}$,$\Sigma=diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)>0$则问题

$\|\Sigma H\Sigma-F\|=\min$在$SR^{r\times r}$中存在唯一的解

$$H=\Sigma^{-1}\frac{F+F^T}{2}\Sigma^{=1}$$

证明:$f(H)=\|\Sigma H\Sigma-F\|^2=tr(\Sigma H\Sigma-F)^T(\Sigma H\Sigma-F)=tr(\Sigma H^T\Sigma\Sigma H\Sigma)-tr(\Sigma H^T\Sigma F)-tr(F^T\Sigma H\Sigma)+tr(F^TF)$

令$\frac{\partial f(H)}{\partial H}=2\Sigma\Sigma H\Sigma\Sigma-\Sigma F^T\Sigma-\Sigma F\Sigma=0$,得

$$H=\Sigma^{-1}\frac{F+F^T}{2}\Sigma^{=1}$$

定理1:对给定的矩阵$X\in R^{n\times m}$,$B\in R^{m\times m}(m\leqslant n)$,并且X的奇异值分解为(3),则问题Ⅰ的解$A\in SR^{n\times n}$可表示为

$$A=U\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}\frac{V_1^TBV_1+V_1^TB^TV_1}{2}\Sigma^{-1} & A_{21}^T\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}U^T \tag{4}$$

其中$A_{21}\in R^{(n-r)\times r}$,$A_{22}\in SR^{(n-r)\times(n-r)}$是任意的。

证明:记

$$U^TAU=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},V^TBV=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix} \tag{5}$$

其中$A_{ij}=U^T_iAU_j$,$B_{ij}=V^T_iBV_j(i,j=1,2)$

由(3),(5),则矩阵方程

$$X^TAX-B=V\begin{pmatrix}\Sigma A_{11}\Sigma-B_{11} & -B_{12}\\ -B_{21} & -B_{22}\end{pmatrix}V^T$$

故$\|X^TAX-B\|^2=\|\Sigma A_{11}\Sigma-B_{11}\|^2+\|B_{12}\|^2+\|B_{21}\|^2+\|B_{22}\|^2=\min$

当且仅当$\|\Sigma A_{11}\Sigma-B_{11}\|=\min$

由引理1知

$$A_{11}=\Sigma^{-1}\frac{B_{11}+B_{11}{}^T}{2}\Sigma^{=1}$$

将之代入(5)即得(4),证毕。

3 问题Ⅱ的解

引理2[7]:(最佳逼近定理)设V_1是有限维空间V

收稿日期:2011-05-04

***基金项目:**本文受安徽省自然科学基金(项目编号:KJ2011Z258)和亳州师专校级课题(项目编号:BSJKY0922)资助。

作者简介:张宗标(1981-),男,安徽砀山人,讲师,南京航空航天大学在职研究生。研究方向:数值代数。

的一个闭凸集，则V中任一向量α在V_1上存在唯一的最佳逼近。

引理3[8]：设$A\in R^{n\times n}$，则对任一n阶矩阵H都有

$$\left\|A-\frac{A+A^T}{2}\right\|\le\|A-H\|$$

引理4：设$H\in R^{n\times r}$，$M\in R^{n\times(n-r)}$，$A\in R^{n\times n}$，则问题

$\|H^TAM-F^T\|^2+\|M^TAH-F\|^2=\min$ 在$R^{(n-r)\times r}$中存在唯一解 $F=\frac{1}{2}M^T(A+A^T)H$

证明：设$f(F)=\|H^TAM-F^T\|^2+\|M^TAH-F\|^2$

$=tr[(H^TAM-F^T)^T(H^TAM-F^T)]+tr[(M^TAH-F^T)^T(M^TAH-F)]$

$=tr(M^TA^THH^TAM)-tr(FH^TAM)-tr(M^TA^THF^T)+tr(FF^T)$

$+tr(H^TA^TMM^TAH)-tr(F^TM^TAH)-tr(H^TA^TMF^T)+tr(F^TF)$

令 $\frac{\partial f(F)}{\partial F}=-M^TA^TH-M^TA^TH+2F-M^TAH-M^TAH+2F=0$，得 $F=\frac{1}{2}M^T(A+A^T)H$

定理2：对给定的矩阵$X\in R^{n\times m}$，$B\in R^{m\times m}$和$\tilde{A}\in R^{n\times n}$，并且X的奇异值分解为(3)，则问题Ⅱ存在唯一的解$\hat{A}\in S_E$，且可表示为

$$\hat{A}=U\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}\frac{V_1^TBV_1+V_1^TB^TV_1}{2}\Sigma^{-1} & \widehat{A_{21}}^T\\ \widehat{A_{21}} & \widehat{A_{22}}\end{pmatrix}U^T \quad (6)$$

其中 $\widehat{A_{21}}=\frac{1}{2}U_2^T(\tilde{A}+\tilde{A}^T)U_1$

$\widehat{A_{22}}=\frac{1}{2}U_2^T(\tilde{A}+\tilde{A}^T)U_2$

证明：由问题Ⅰ知S_E非空，且S_E是Hilbert空间$R^{n\times n}$中的一个闭凸集。由引理2知，$\tilde{A}\in R^{n\times n}$在$S_E$中存在唯一的最佳逼近，即问题Ⅱ存在唯一的解$\tilde{A}\in S_E$。

由定理1知，对任意的$A\in S_E$，

$$A=U\begin{pmatrix}\Sigma^{-1}\frac{V_1^TBV_1+V_1^TB^TV_1}{2}\Sigma^{-1} & A_{21}^T\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}U^T$$

令 $A_{11}=\Sigma^{-1}\frac{V_1^TBV_1+V_1^TB^TV_1}{2}\Sigma^{-1}$

则

$$\tilde{A}-A=\tilde{A}-U\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}^T\\ A_{22} & A_{22}\end{pmatrix}U^T=U\left[U^T\tilde{A}U-\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}^T\\ A_{22} & A_{22}\end{pmatrix}\right]U^T$$

$$\|\tilde{A}-A\|^2=\left\|\begin{pmatrix}U_1^T\tilde{A}U_1-A_{11} & U_1^T\tilde{A}U_2-A_{21}^T\\ U_2^T\tilde{A}U_1-A_{21} & U_2^T\tilde{A}U_2-A_{22}\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$=\|U_1^T\tilde{A}U_1-A_{11}\|^2+\|U_1^T\tilde{A}U_2-A_{21}^T\|^2$$

$$+\|U_2^T\tilde{A}U_1-A_{21}\|^2+\|U_2^T\tilde{A}U_2-A_{22}\|^2$$

由上式知$\|\tilde{A}-A\|=\min$当且仅当

$$\begin{cases}\|U_1^T\tilde{A}U_2-A_{21}^T\|^2+\|U_2^T\tilde{A}U_1-A_{21}\|^2=\min & (7)\\ \|U_2^T\tilde{A}U_2-A_{22}\|^2=\min & (8)\end{cases}$$

由引理3知(7)式的解

$$\widehat{A_{21}}=\frac{1}{2}U_2^T(\tilde{A}+\tilde{A}^T)U_1 \quad (9)$$

由引理4知(8)式的解

$$\widehat{A_{22}}=\frac{1}{2}U_2^T(\tilde{A}+\tilde{A}^T)U_2 \quad (10)$$

将(9)(10)代入(4)即得(6)式，证毕。

注释及参考文献：

[1]周树荃，戴华.代数特征值反问题[M].郑州：河南科学技术出版社，1991.

[2]张磊.一类对称矩阵的逆特征值问题[J].高等计算数学学报，1990，12(1)：65-71.

[3]周富照，胡锡炎，张磊.对称正交反对称矩阵反问题[J].数学物理学报，2004，24A：543-550.

[4]张磊，谢冬秀.一类逆特征值问题[J].数学物理学报，1993，23(1)：94-99.

[5]戴华. 一类对称正交反对称矩阵反问题[J].工程数学学报，2003，20(3)：41-48.

[6]彭振赟. 矩阵方程$X^TAX=B$的中心对称解及其最佳逼近[J].长沙电力学院学报，2002，17(2)：3-6.

[7]戴华.矩阵论[M].北京：科学出版社，2001.

[8]Fan K，Hoffman A J.Some metric inequalityies in the space of matries[J].Proc Amer Math Soc，1965(6)：111-116.

Least-square Solutions of Inverse Problems for Symmetric Matrices

ZHANG Zong-biao[1,2]

(1.College of Science，Nanjing University of Astronautics and Aeronautics，Nanjing，Jiangsu 210016；
2.Department of Physics and Chemistry，Bozhou Teachers College，Bozhou，Anhui 236800)

Abstract: This paper discusses the inverse problems and the optimal approximation of the (下转37页)

[16]国家环保局《水和废水监测分析方法》编委会编.水和废水监测分析方法[M].北京：中国环境科学出版社，2005.

The Study of Wet Plants' Ability to Remove Pollutants in Qionghai Lake

CHEN Ming-dong，ZHU Hai-feng，XIE Yang，DONG Xiao-wan，CHEN Chen，WANG Shan-yi

（School of Agricultural Science，Xichang College，Xichang，Sichuan 615013）

Abstract: Region Ⅲ of Qionghai Lake was chosen as representative region to study. By investigating the wetland plants and comparing the water quality of the samples which were taken from wetlan and Haihe River mouth close to it. It was found that the quality of water with wet plants and close to Haihe River mouth was much better than the waster which was collected at the site far away from wet plants in the center of the lake. This experiment shows that wet plants do have the ability to wipe off some pollutants. Therefore，in order to use minimum cost to make maximum returns，we should attach more importance to protect natural wetlands to build more constructed wetlands.

Key words: Qionghai lake；Water subarea；Wetland plants；Pollutants

（上接22页）

symmetric matrices.Through the properties of this kind of matrixes，the solvable conditions and the general solution of the inverse problems are given，which not only proves the existence and uniqueness of the Least-square Solution，but also derived the expression of the solution.

Key words: Symetric matrices；Least-square solution；Inverse problem；Optional approximation

（上接24页）

（College of Sciences，China University of Mining &Technology，Xuzhou，Jiangsu 221116）

Abstract: For a nontrivial connected graph G，let c：V（G）→N be a vertex coloring of G where adjacent vertexes may be colored the same. For a vertex ν of G，the neighborhood color set NC（ν）is the set of colors of the neighbors of ν. The coloring c is called a set coloring if NC（ν）≠NC（u）for every pair u，ν of adjacent vertexes of G. The minimum number of colors required of such a coloring is called the set chromatic number χ_s（G）of G. This paper gives the set chromatic numbers of some planar graphs，which contain the planar graphs of its clique number is 3，the planar graphs without 4-cycles，fireworks graphs and windmill graphs.

Key words: Panar graphs；Ique number；Chromatic number；Reworks graph；Dmill graphs