

一类广义隐拟似变分包含组

肖成英¹, 任 晓²

(1.四川广播电视大学, 四川 成都 610073; 2.西昌学院, 四川 西昌 615022)

【摘 要】利用 η -强单调, (G, η) -单调以及广义预解算子的性质, 讨论了实 Hilbert 空间中一类广义隐拟似变分包含组问题, 并使用 Mann 迭代研究了这类变分包含组解的迭代逼近。

【关键词】Lipschitz 连续; (G, η) -单调; 广义预解算子; Mann 迭代; 广义隐拟似变分包含组

【中图分类号】O177.91 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2011)02-0018-03

本文利用 $\{c_n\}, \{k_n\}$ (G, η) -单调算子的性质及 Mann 迭代证明了广义隐拟似变分包含组解的存在性和迭代序列的收敛性。

1 模型及其概况

设 H_1, H_2 为实 Hilbert 空间, $A \subset H_1, B \subset H_2$ 为非空闭凸子集。设 $\eta_1: H_1 \times H_1 \rightarrow H_1, \eta_2: H_2 \times H_2 \rightarrow H_2, F: H_1 \times H_2 \rightarrow H_1, G: H_1 \times H_2 \rightarrow H_2, C: H_1 \rightarrow H_1, D: H_2 \rightarrow H_2$ 为单值映射, $T: H_1 \rightarrow CB(H_1), P: H_2 \rightarrow CB(H_2)$ 为多值映射。设 $M: H_1 \times H_2 \rightarrow 2^M$ 关于第一变量是 (C, η_1) -单调, $N: H_1 \times H_2 \rightarrow 2^N$ 关于第二变量是 (D, η_2) -单调, 则对给定的 $e \in H_1, f \in H_2$, 找 $(a, b) \in A \times B, u \in T(a), v \in P(b)$ 使得

$$e \in F(u, v) + M(a, b) \quad (1)$$

$$f \in G(u, v) + N(a, b)$$

该问题被称为一类广义隐拟似变分包含组。

说明: 当 e, f, T, P, M, N 取适当值时, 问题(1)就变成文献^[1-5]中所研究的特殊问题。

2 算法及收敛性分析

本节证明了问题(1)解的存在性以及算法的收敛性分析, 为了得到结果, 首先来证明下面的引理和定理。

定理 1 设 $\eta_1: H_1 \times H_1 \rightarrow H_1, \eta_2: H_2 \times H_2 \rightarrow H_2, F: H_1 \times H_2 \rightarrow H_1, G: H_1 \times H_2 \rightarrow H_2, C: H_1 \rightarrow H_1, D: H_2 \rightarrow H_2$, 为单值映射, $T: H_1 \rightarrow CB(H_1), P: H_2 \rightarrow CB(H_2)$ 为多值映射。 $M: H_1 \times H_2 \rightarrow 2^M$ 关于第一变量是 (C, η_1) -单调, $N: H_1 \times H_2 \rightarrow 2^N$ 关于第二变量是 (D, η_2) -单调, 则 $(a, b) \in A \times B, u \in T(a), v \in P(b)$ 是问题(1)的解当且仅当 (a, b, u, v) 满足

$$a = R_{M(\cdot, x), \lambda}^{C, \eta_1} [C(a) - \lambda(F(u, v) - e)]$$

$$b = R_{N(x, \cdot), \rho}^{D, \eta_2} [D(b) - \rho(G(u, v) - f)]$$

证明: 从广义预解算子的定义, 可以直接得到。

引理 1 设 $\{c_n\}, \{k_n\}$ 为非负实序列, 并且满足下面的条件

$$(1) 0 \leq k_n < 1, n=0, 1, 2, \dots \text{ 及 } \limsup_n k_n < 1$$

$$(2) c_{n+1} \leq k_n c_n, n=0, 1, 2, \dots$$

则 c_n 收敛于 0, 当 $n \rightarrow \infty$ 时。

算法 1 设 $\eta_1, \eta_2, T, P, C, D, F, G, M, N$ 同定理 1 中一样, 对任给 $(a_0, b_0) \in A \times B, u_0 \in T(a_0), v_0 \in P(b_0)$, 则 Mann 迭代序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为

$$a_{n+1} = \alpha_n a_n + (1 - \alpha_n) R_{M(\cdot, x), \lambda}^{C, \eta_1} [C(a_n) - \lambda(F(u_n, v_n) - e)]$$

$$b_{n+1} = \alpha_n b_n + (1 - \alpha_n) R_{N(x, \cdot), \rho}^{D, \eta_2} [D(b_n) - \rho(G(u_n, v_n) - f)]$$

其中 $0 \leq \alpha_n < 1$, 且 $\limsup_n \alpha_n < 1$

现在来证明问题(1)解的存在性和算法 1 的收敛性。

定理 2 设 $\eta_1, \eta_2, T, P, C, D, F, G, M, N$ 同定理 1 中一样, 且 $\eta_i: H_i \times H_i \rightarrow H_i, (i=1, 2)$ 是 Lipschitz 连续的, 常数为 $\tau_i, (i=1, 2)$, C 是 η_1 -强单调和 Lipschitz 连续的, 常数分别为 σ_c, δ_c ; D 是 η_2 -单调和 Lipschitz 连续的, 常数分别为 σ_d, δ_d , 特别当 $\eta_i = \eta_j = x - y$ 时, C 和 D 是强单调, 常数分别为 β_1, β_2 , 设 M 关于第一变量是 (C, η_1) -单

调, N 关于第二变量是 (D, η_2) -单调, 设 T 是 Lipschitz 连续的, 常数为 s_1 , P 是 Lipschitz 连续的, 常数为 s_2 , 设 F 的两个变量都是 Lipschitz 连续的, 常数分别为 k_1, w_1 , T 关于 F 的第一个变量强单调, 常数为 ξ_1 , G 的两个变量都是 Lipschitz 连续的, 常数分别为 k_2, w_2 , P 关于 G 的第二个变量是强单调, 常数为 ξ_2 , 若存在常数 $\lambda > 0, \rho > 0$ 使得

$$\begin{cases} \frac{\tau_1}{\sigma_c - \lambda m_1} (\sqrt{1 - 2\beta_1 + \delta_c^2} + \sqrt{1 - 2\lambda\xi_1 + \lambda^2 s_1^2 k_1^2}) + \frac{\tau_2}{\sigma_d - \rho m_2} \rho w_2 s_1 < 1 \\ \frac{\tau_2}{\sigma_d - \rho m_2} (\sqrt{1 - 2\beta_2 + \delta_d^2} + \sqrt{1 - 2\rho\xi_2 + \rho^2 s_2^2 k_2^2}) + \frac{\tau_1}{\sigma_c - \lambda m_1} \lambda w_1 s_2 < 1 \\ 0 < \lambda < \frac{\sigma_c}{m_1} \\ 0 < \rho < \frac{\sigma_d}{m_2} \end{cases} \quad (2)$$

则迭代序列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{u_n\}, \{v_n\}$ 收敛于问题 (1) 的解 (a, b, u, v) 。

证明: 由算法 1 及 $R_{M,\lambda}^{C,\eta_1}$ 是 Lipschitz 连续的, 常数为 $\frac{\tau_1}{\sigma_c - \lambda m_1}$, 得

$$\begin{aligned} \|a_{n+1} - a_n\| &= \alpha_n \|a_n - a_{n-1}\| + (1 - \alpha_n) \|R_{M,\lambda}^{C,\eta_1}[C(a_n) - \lambda(F(u_n, v_n) - e)] - R_{M,\lambda}^{C,\eta_1}[C(a_{n-1}) - \lambda(F(u_{n-1}, v_{n-1}) - e)]\| \\ &\leq \alpha_n \|a_n - a_{n-1}\| + (1 - \alpha_n) \frac{\tau_1}{\sigma_c - \lambda m_1} \|C(a_n) - C(a_{n-1}) - \lambda(F(u_n, v_n) - F(u_{n-1}, v_{n-1}))\| \end{aligned} \quad (3)$$

因 C 是强单调和 Lipschitz 连续的, 常数分别为 β_1, δ_c , 所以有

$$\begin{aligned} \|C(a_n) - C(a_{n-1}) - \lambda(F(u_n, v_n) - F(u_{n-1}, v_{n-1}))\|^2 &= \|a_n - a_{n-1}\|^2 - 2\langle a_n - a_{n-1}, C(a_n) - C(a_{n-1}) \rangle + \|C(a_n) - C(a_{n-1})\|^2 \\ &\leq (1 - 2\beta_1 + \delta_c^2) \|a_n - a_{n-1}\|^2 \end{aligned} \quad (4)$$

又因 T 关于 F 的第一变量强单调和 Lipschitz 连续, 常数为 ξ_1, s_1 ; 且 F 的第一变量是 Lipschitz 连续的, 常数为 k_1 , 则有

$$\begin{aligned} \|a_n - a_{n-1} - \lambda(F(u_n, v_n) - F(u_{n-1}, v_{n-1}))\|^2 &= \|a_n - a_{n-1}\|^2 - 2\lambda\langle a_n - a_{n-1}, F(u_n, v_n) - F(u_{n-1}, v_{n-1}) \rangle + \lambda^2 \|F(u_n, v_n) - F(u_{n-1}, v_{n-1})\|^2 \\ &= (1 - 2\lambda\xi_1 + \lambda^2 k_1^2 s_1^2) \|a_n - a_{n-1}\|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

又因 F 的第二变量是 w_1 -Lipschitz 连续的, 且 P 是 s_2 -Lipschitz 连续的,

$$\|F(u_{n-1}, v_n) - F(u_{n-1}, v_{n-1})\| \leq w_1 \|v_n - v_{n-1}\| \leq w_1 s_2 \|b_n - b_{n-1}\| \quad (6)$$

由 (2) — (6), 可得

$$\begin{aligned} \|a_{n+1} - a_n\| &= [\alpha_n + (1 - \alpha_n) \frac{\tau_1}{\sigma_c - \lambda m_1} (\sqrt{1 - 2\beta_1 + \delta_c^2} + \sqrt{1 - 2\lambda\xi_1 + \lambda^2 s_1^2 k_1^2})] \|a_n - a_{n-1}\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n) \frac{\tau_1}{\sigma_c - \lambda m_1} \lambda w_1 s_2 \|b_n - b_{n-1}\| \end{aligned} \quad (7)$$

同样可得

$$\begin{aligned} \|b_{n+1} - b_n\| &= [\alpha_n + (1 - \alpha_n) \frac{\tau_2}{\sigma_d - \rho m_2} (\sqrt{1 - 2\beta_2 + \delta_d^2} + \sqrt{1 - 2\rho\xi_2 + \rho^2 s_2^2 k_2^2})] \|b_n - b_{n-1}\| \\ &\quad + (1 - \alpha_n) \frac{\tau_2}{\sigma_d - \rho m_2} \rho w_2 s_1 \|a_n - a_{n-1}\| \end{aligned} \quad (8)$$

设

$$\begin{aligned} k = \max \left\{ \frac{\tau_1}{\sigma_c - \lambda m_1} (\sqrt{1 - 2\beta_1 + \delta_c^2} + \sqrt{1 - 2\lambda\xi_1 + \lambda^2 s_1^2 k_1^2}) + \frac{\tau_2}{\sigma_d - \rho m_2} \rho w_2 s_1, \right. \\ \left. \frac{\tau_2}{\sigma_d - \rho m_2} (\sqrt{1 - 2\beta_2 + \delta_d^2} + \sqrt{1 - 2\rho\xi_2 + \rho^2 s_2^2 k_2^2}) + \frac{\tau_1}{\sigma_c - \lambda m_1} \lambda w_1 s_2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

将(7)和(8)相加,得

$$\begin{aligned} & \|a_{n+1} - a_n\| + \|b_{n+1} - b_n\| \\ & \leq [\alpha_n + (1 - \alpha_n)k](\|a_n - a_{n-1}\| + \|b_n - b_{n-1}\|) \\ & = [k + (1 + k)\alpha_n](\|a_n - a_{n-1}\| + \|b_n - b_{n-1}\|) \end{aligned} \quad (10)$$

由(2),知 $0 \leq k < 1$,设 $c_{n+1} = \|a_{n+1} - a_n\| + \|b_{n+1} - b_n\|$, $k_n = k + (1 - k)\alpha_n$ 则(10)可写成

$$c_{n+1} \leq k_n c_n, n=0, 1, 2, \dots$$

由算法(1),知 $\limsup_n k_n < 1$,由引理1,存在 d ,使得 $0 \leq k_n \leq d < 1$,及

$$\|a_{n+1} - a_n\| + \|b_{n+1} - b_n\| \leq d(\|a_n - a_{n-1}\| + \|b_n - b_{n-1}\|)$$

所以 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是 H_1, H_2 中的Cauchy序列。设 $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$,当 $n \rightarrow \infty$ 时,由条件(2),得

$$\begin{cases} a = R_{M,\lambda}^{C,\eta_1}[C(a) - \lambda(F(u,v) - e)] \\ b = R_{N,\rho}^{D,\eta_2}[D(b) - \rho(G(u,v) - f)] \end{cases}$$

再由定理1,知 (a,b) 是问题(1)的解。

注释及参考文献:

- [1]Ding.X.P, Existence and algorithm of solutions for generalized mixed implicit quasi variational inequalities, Appl.Math. Comput.113(2000)67-80.
- [2]N.J.Huang, C.X.Deng, Auxiliary principle and iterative algorithms for generalized set-valued strongly nonlinear mixed variational-like inequalities, J.Math.Anal.256(2001):345-359.
- [3]Ding.X.P, Algorithms of solutions for completely generalized mixed implicit quasivariational inclusions, Appl.Math.Comput. 148(2004):47-66.
- [4]Fang.Y.P and Huang.N.L, H-Monotone operators and resolvent operator technique for variational inclusions, Appl, Math, Comput, 2003, 145:795-803.
- [5]R.U.Verma, Generalized system of relaxed cocoercive variational inequalities and projection methods, J, Optim, Theory Appl, 2004, 121(1):203-210.

A System of Generalized Implicit Quasi Variational-Like Inclusion

XIAO Cheng-Ying¹, REN-Xiao²

(1.Sichuan Broadcasting Television University, Chengdu, Sichuan 610073;

2.Xichang College, Xichang, Sichuan 615022)

Abstract: By using the properties of η -strongly monotone, (G, η) -monotone and generalized resolvent operator, a system of generalized Implicit quasi variational-like inclusion has been studied in Hilbert spaces. The existence of solution and the convergence of iterative sequences have also been given by Mann iterative.

Key words: Lipschitz continuous; (G, η) -monotone; Generalized resolvent operator; Mann iterative; A System of generalized implicit quasi variational-like inclusion