关于涉及CM分担的超越亚纯函数的亏量*

李忠广
（菏泽学院 机电工程系,山东 菏泽 274000）

【摘 要】本文中,通过研究CM分担0,1,∞的两个开平面内的超越亚纯函数f,g,得到关于f和g的亏量的一个有趣的不等式。

【关键词】超越亚纯函数;CM分担值;亏量
【中图分类号】O174.52 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2011)01-0018-02

1 引言

设f,g为开平面C上的两个非常数亚纯函数,如果对于复数$a\in C\cup\{\infty\}$,f–a与g–a的零点相同且相应的零点的重数也相同,则称f和g以a为CM分担值。若不计重数,则称f和g以a为IM分担值。本文假设读者熟悉Nevanlinna值分布论理论[1,2]的基本概念和标准符号,如T(r,f),m(r,f),N(r,f)等。记N(r,a;f | =1)=N(r,1/(f–a)),N(r,a;f | ≤k),(k为正整数)表示f–a的重数不超过k的零点计数函数;记N(r,a;f | ≥k)表示f–a的重数不小于k的零点计数函数。它们精简的计数函数分别为$\overline{N}(r,a;f|\le k)$,$\overline{N}(r,a;f|\ge k)$。

定义1.1[3] 对于复数$a\in C\cup\{\infty\}$及正整数p,有

$$\delta_{p)}(a,f)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,a;f|\le p)}{T(r,f)}$$

易知

2 定义及其结果

$0\le\delta_{p)}(a,f)\le\delta_{p-1)}(a,f)\le L\le\delta_{1)}(a,f)\le 1.$

设$n_0(r,a)$表示在|z|≤r上f–a与g–a的零点的个数,计重数;$\overline{n}_0(r,a)$表示在|z|≤r上f–a与g–a的零点的个数,不计重数;并记

$$\overline{N}_0(r,a)=\int_0^r\frac{\overline{n}_0(t,a)-\overline{n}_0(0,a)}{t}dt+\overline{n}_0(0,a)\log r$$

$$N_0(r,a)=N(r,a)=\int_0^r\frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}dt+n(0,a)\log r$$

$$\overline{N}_{1,2}(r,a)=\overline{N}(r,1/(f-a))+\overline{N}(r,1/(g-a))-2\overline{N}_0(r,a)$$

定义1.2[4] 对于复数$a\in C\cup\{\infty\}$,及非常数亚纯函数f,g,有

$$\delta_{1,2}(0|=1)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_{1,2}(r,0|=1)}{T(r,f)+T(r,g)}$$

其中

$N_{1,2}(r,0|=1)=N(r,0;f|=1)+N(r,0;g|=1)-2N_0(r,0|=1)$

SetinmetzN在文献[5]中建立了如下不等式:

定理A 设f为开平面内的超越亚纯函数,a_1,a_2,L,a_n为f的(n≥3)个判别的小函数,ε为任意给定的充分小的正数,则

$$(n-2)T(r,f)<\sum_{i=1}^{n}N(r,a_i)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f)$$

其中S(r,f)=o(T(r,f))

基于上述定义及定理,本文得到如下结果:

定理 设f,g为开平面C上的两个非常数的超越亚纯函数,且f和g以0,1,∞为CM分担值。则对于f和g公共的相互判别的小函数a_1,a_2,L,a_n,其中$a_i\ne 0,1,\infty$,(i=1,2,L,n)和任意给定的充分小的正数ε,有

$$\delta_{1,2}(0|=1)+\delta_{1,2}(1|=1)+\delta_{1,2}(\infty|=1)+\sum_{i=1}^{n}\delta_{1,2}(r,a_i)+$$
$$2\delta_0(0|=1)+2\delta_0(1|=1)+2\delta_0(\infty|=1)+2\sum_{i=1}^{n}\delta_0(r,a_i)\le 2n+8+\varepsilon$$

其中$\delta_0(0|=1)$,$\delta_0(1|=1)$,$\delta_0(\infty|=1)$,如定义1.3.

3 定理的证明

证明:由定理A知

$(n+1)T(r,f)<N(r,0;f|=1)+N(r,1;f|=1)+N(r,\infty;f|=1)+\sum_{i=1}^{n}N(r,a_i)+\varepsilon T(r,f)+S(r,f).$ (1)

和

$(n+1)T(r,g)<N(r,0;g|=1)+N(r,1;g|=1)+N(r,\infty;g|=1)+\sum_{i=1}^{n}N(r,a_i)+\varepsilon T(r,g)+S(r,g).$ (2)

把(1)和(2)相加得

$(n+1)\{T(r,f)+T(r,g)\}<N(r,0;f|=1)+N(r,1;f|=1)+N(r,\infty;f|=1)+N(r,0;g|=1)+N(r,1;g|=1)+N(r,\infty;g|=1)+\sum_{i=1}^{n}\{N(r,f=a_i)\}+N(r,g=a_i)+\varepsilon\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,g)+S(r,f)$ (3)

由于

$N(r,0;f|=1)+N(r,0;g|=1)=N_{1,2}(r,0|=1)+2N_0(r,0|=1)$;

$N(r,1;f|=1)+N(r,1;g|=1)=N_{1,2}(r,1|=1)+$

收稿日期:2011–02–15
*基金项目:菏泽学院科技计划项目资助(项目编号:XY09JX01)。
作者简介:李忠广(1980–),男,山东成武人,助教,硕士,研究方向:亚纯函数的奇异方向。

$2N_0(r,1\mid=1)$；

$N(r,g=a_i)+N(r,g=a_i)=N_{1,2}(r,a_i)+2N_0(r,a_i)$；

$N(r,\infty;f\mid=1)+N(r,\infty;g\mid=1)=N_{1,2}(r,\infty\mid=1)+2N_0(r,\infty\mid=1)$.

则式(3)可化为

$$(n+1)\{T(r,f)+T(r,g)\}<\{N_{1,2}(r,0\mid=1)+2N_0(r,0\mid=1)\}+\{N_{1,2}(r,1\mid=1)+2N_0(r,1\mid=1)\}+\{N_{1,2}(r,\infty\mid=1)+2N_0(r,\infty\mid=1)\}\sum_{i=1}^{n}\{N_{1,2}(r,a_i)+2N_0(r,a_i)\}+\varepsilon\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,g)+S(r,f). \tag{4}$$

对式(4)不等号两边同除以$\{T(r,f)+T(r,g)\}$，然后再取上极限得

$$(n+1)\leqslant\{1-\delta_{1,2}(0\mid=1)\}+2\{1-\delta_0(0\mid=1)\}+\{1-\delta_{1,2}(1\mid=1)\}+2\{1-\delta_0(1\mid=1)\}+\{1-\delta_{1,2}(\infty\mid=1)\}+2\{1-\delta_0(\infty\mid=1)\}+\sum_{i=1}^{n}\{1-\delta_{1,2}(r,a_i)\}+2\{1-\delta_0(r,a_i)\}+\varepsilon \tag{5}$$

既得

$$(n+1)\leqslant(3n+9)-\{\delta_{1,2}(0\mid=1)\}+\delta_{1,2}(1\mid=1)\}+\delta_{1,2}(\infty\mid=1)\}-2\{\delta_0(0\mid=1)\}+\delta_0(1\mid=1)+\delta_0(\infty\mid=1)\}-\sum_{i=1}^{n}\delta_{1,2}(r,a_i)-2\sum_{i=1}^{n}\delta_0(r,a_i)+\varepsilon \tag{6}$$

对式(6)整理得

$$\delta_{1,2}(0\mid=1)+\delta_{1,2}(1\mid=1)+\delta_{1,2}(\infty\mid=1)+\sum_{i=1}^{n}\delta_{1,2}(r,a_i)+2\delta_0(0\mid=1)+\delta_0(1\mid=1)+2\delta_0(\infty\mid=1)+2\sum_{i=1}^{n}\delta_0(r,a_i)\leqslant 2n+8+\varepsilon$$

注释及参考文献：

[1]杨乐.值分布论及其新研究[M].北京：中国科学出版社，1982：4-35.

[2]Yi H X，Yang C C.Uniqueness Theory of Meromorphic Functions[M].Beijing：Science Press，1995.

[3]I.Lahiri.Weighted sharing of three values and uniqueness of meromorphic functions[J].Kodai Math.J.24(2001)，no.3，421-435.

[4]Singh，A.P.Relative defects corresponding to the common roots of two meromorphic functions，Kodai Math.J.，6(1983)，333-339.

[5]Setinmetz N.Eine verall gemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen hauptsatzes[J].J Reine Angew Math，1986，368：134-141.

On the Deficiencies of Transcendental Meromorphic Functions Related to CM Sharing

LI Zhong-guang

(Department of Machinery and Electronic Engineering，Heze University，Heze，Shandong 274000)

Abstract: In this paper，by studying two transcendental meromorphic functions，in the open complex plane which share CM，we obtained an interesting inequality about the functions of and.

Key words: Transcendental meromorphic functions；CM shared values；Deficiencies