初等函数的几点商讨

孙树东

(新疆警官高等专科学校,新疆 乌鲁木齐 830011)

【摘　要】本文讨论了基本初等函数的判定以及初等函数的构成和初等函数的判断,并对现行教材中初等函数的定义提出了商讨意见。

【关键词】基本初等函数;初等函数;分段函数;非初等函数

【中图分类号】O171 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2010)04-0032-03

1 引言

高等数学研究的主要对象是函数,而基本初等函数和初等函数又是函数中的基本而又重要的概念。关于它们的概念,不同的数学分析和高等数学的教材以及参考书有不同的定义和描述,这其中有些在本质上是等价的,而有些又是有区别的。另一方面,关于这方面的习题又经常出现,有些甚至不够准确。在教学中,笔者发现许多学生甚至个别的教师对这些感到模糊,也不是很重视这些内容。为此,本文针对这方面的问题做了一些补充和整理。

现行的数学分析教材对"初等函数"的定义为:

定义1　由基本初等函数经过有限次的四则运算与复合运算所得到的函数,统称为初等函数。

在这里,基本初等函数指常量函数($y=c$)、幂函数($y=x^a$,a为实数)、指数函数($y=\alpha^x$,$\alpha>0$且$\alpha\neq 0$)、对数函数($y=\log_\alpha x$,$a>0$,且$a\neq 1$)、三角函数($y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$)、反三角函数($y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\mathrm{arccot}x$)。

可见初等函数的构成有四则运算、函数的复合两种情况。

2 基本初等函数的判定以及初等函数的构成

虽然基本初等函数是基本的概念,但在教学中很多学生甚至一些老师对"基本初等函数的判定"这类问题也容易出错。

例1:下列函数中是基本初等函数的是(　)

A.$f(x)=x+1$;　　B.$f(x)=-x$;

C.$f(x)=x^{\sqrt{2}}$;　　D.$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$

分析:像这类问题,要严格按照基本初等函数的定义,即判断上述函数是否符合某一类基本初等函数表达式,容易知道A、B、D都不满足任何一种基本初等函数。

解:由于为幂函数,结果应为(C)。

例2:下列函数中不是基本初等函数的是(　)

A.$y=\sqrt[5]{\frac{1}{x}}$;　　B.$y=(\frac{1}{2})^x$;

C.$y=\log_5 x$;　　D.$y=2x$。

分析:$y=\sqrt[5]{\frac{1}{x}}$为幂函数、$y=(\frac{1}{2})^x$为指函数、$y=\log_5 x$为对数函数

解:结果应为(D)。

关于初等函数的构成,许多的教材、参考书上都有类似的习题和例题,但它们都描述得不够准确,这样会让读者感到错误的理解。

例3:[1]试问下列函数是由哪些基本初等函数复合而成?

(1)$y=(1+x)^{20}$;　　(2)$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$

分析:教材所给出的答案是:$y=(1+x)^{20}$是由$y=u^{20}$,$u=1+x$复合而成。$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$是由$y=\lg u$,$u=1+v$,$V=\sqrt{w}$,$w=1+x^2$,复合而成。

事实上,例3题目及答案不够准确,混淆了基本初等函数的定义以及初等函数的构成,即$u=1+x$、$w=1+x^2$本身不是基本初等函数,并且它们也不能仅由基本初等函数复合而成,而是必须通过一些四则运算才能构成,因此笔者认为例3题目应改为:

例4:试问下列函数是由哪些基本初等函数复合或四则运算而成?

(1)$y=(1+x)^{20}$;　　(2)$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$

解:$y=(1+x)^{20}$是由$y=u^{20}$(其中u由1、x通过四则运算组成)复合而成。$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$是由$y=\lg u$(其中u由1、v通过四则运算组成)、$v=\sqrt{w}$(其中w由1、s通过四则运算组成)、$s=x^2$复合而成。

当然,也可以像有的教材那样把例3改为:

例5:试问下列函数是由哪些初等函数复合而成?

(1)$y=(1+x)^{20}$;　　(2)$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$

解:$y=(1+x)^{20}$是由$y=u^{20}$,$u=1+x$复合而成。$Y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$是由$y=\lg u$,$u=1+v$,$v=\sqrt{w}$,$w=1+x^2$复合而成。

收稿日期:2010-10-15

作者简介:孙树东(1958-　),男,讲师,主要从事高等数学的教学及研究工作。

这样通过上述分析，对基本初等函数的判断以及初等函数的构成也有了比较准确的理解。

3 初等函数的判断

虽然教材[1]给出了初等函数的定义，但不同的教材关于初等函数的定义有着不同的描述，例如高等数学教材[2]对“初等函数”的定义为：

定义2　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。

在这里，基本初等函数指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，只不过此定义本身已包含了常数。抛开常数是否是基本初等函数这一情况，应该说定义1与定义2这两个关于初等函数的定义的根本区别在于初等函数是否是可用一个式子表示的函数。

由于基本初等函数经过有限次的四则运算只产生一个式子，而函数的复合则可产生分段函数，如 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$，可以复合成函数 $Y=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$。但这种分段函数毕竟可以用一个式子给出，而初等函数定义中函数的复合步骤只允许有限次，那么这样得到的函数当然可用一个解析式子表示。这样定义2中的第二个条件就蕴含在第一个条件中了，这就不符合给概念下定义的规则。并且定义2含义并不明确，也容易给人造成误解，甚至导致有些研究[3]就明确声明分段函数不是初等函数，这显然是不正确的。因此笔者认为这两种定义有相同的内涵，而且定义1更合适。

另外即使有人意识到分段函数可能是初等函数，也可能不是初等函数，但都未能给以足够的重视并加以全面研究，从而对这个问题的认识不是很清楚。

例6 $fx=\begin{cases}1, x<0\\ -1, x>0\end{cases}$ 函数也可以写成 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$，它是由 $\sqrt{u}$、$u=x^2$ 以及 $v=x$ 通过复合或四则运算得到，因此为初等函数。同理函数 $g(x)=\begin{cases}e^x, x\leqslant 0\\ \cos x, x>0\end{cases}$ 也可以写成 $g(x)=e^{\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2})}+\cos\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2})-1$，它也是初等函数。

例7 离散分布函数 $f(x)=\begin{cases}A_1, x=\alpha_1\\ A_2, x=\alpha_2\\ A_3, x=\alpha_3\\ \cdots\\ A_n, x=\alpha_n\end{cases}$。这里n是正整数，$A_i$、$a_i$($i=1,\cdots,n$)是常数且 $a_i\neq a_j$，($i\neq j$)，i、j=1，2，⋯n，则易知该函数是初等函数，这是因为

$$f(x)=\sqrt{(x-a_{1)}(x-a_2)\dots(x-a_n)}+\sqrt{-(x-a_{1)}(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$

$$+\frac{A_1(x-a_{2)}(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_1-a_{2)}(a_{1}\_a3)\dots(a_1-a_n)}+\frac{A_2(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)}$$

$$+(\frac{A_n(x-a_{1)}(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}$$

那么究竟什么样的函数不是初等函数呢？几乎所有的教材都称“不是初等函数的函数为非初等函数”，严格来说这不是一个定义。

例8：狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{为有理数}\\ 0, x\text{为无理数}\end{cases}$ 以及[0，1]上的黎曼函数

$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q},\text{当}x=\frac{p}{q}(p、q\in N_+,\frac{p}{q})\text{既约真分数}\\ 0,\text{当}x=0、1\text{和}(0,1)\text{内的无理数}\end{cases}$ 都不是由基本初等函数经过有限次的四则运算与复合运算所得到的，因此不是初等函数。

从以上例子可以看出，有些分段函数通过转化可用一个式子表示，能表示为初等函数形式。但是有一些分段函数虽然目前不能表示为一个式子，但是随着数学的发展，有些分段函数以后就有可能表示为一式子。可见初等函数与非初等函数的区别不能仅从表面上是否为一个式子表示，还应该从每个分段在其对应区间上的解析式及其在分界点的情况等方面考虑，限于篇幅，关于这方面的内容读者可参考相关研究[4-6]。

另外初等函数与非初等函数还有其他的判断办法和表现形式。

例9：函数 $f(x)=\begin{cases}x-2, x>0\\ x+1, x<0\end{cases}$ 在分段点 $x=0$ 处不连续，因此由“初等函数在其定义区间上连续”知该函数必定不是初等函数。

另外，有些初等函数还可以表示为级数、极限等“非初等函数”的形式，如：

例10：级数 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\frac{x^n}{n!}+\dots, x\in R$ 和级数 $x-\frac{x^3}{3!}+\dots\frac{x^5}{5!}\dots(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots,\ x\in R$ 都是初等函数，以及 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{x\ln a}{n})n+(\int_1^{x^2+1}\frac{1}{t}dt)^{-1}(a>0\text{且}a\neq 1)$ 也是初等函数，事实上由级数和函数的极限的运算容易知道他们分别等于 e^x、$\sin x$、$a^{-x}+\frac{1}{\ln(x^2+1)}$，但从初等函数的定义上却不能解释这些情况。

由此可见，上述关于初等函数的定义是从初等函数的组成结构来界定的，只是从表达式上来定义。既没有从外延上给以明确划分，更没有从内涵上给以明确恰当的表明。随着客观现实及数学实践的不断深入，会赋予函数更多的属性，而分段函

数等其他函数的表现形式和属性也会越来越丰富充实,分段函数等其他函数的属性与初等函数的属性的重叠交叉会越来越多,关系越来越复杂,遇到的冲突矛盾会越来越多。关于初等函数与其他函数的关系问题,至今未得到完满解决(一般所学的教材和参考书也只是简单地提了一下)。因此需要数学界的专家和学者给出“初等函数”以更加严谨确切的定义,以免在数学实践中出现混乱。

注释及参考文献:

[1]华东师范大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社,2001:14-15.
[2]同济大学数学教研室.高等数学[M].北京:高等教育出版社,2007:17.
[3]凌明娟.高等数学(一)数学辅导[M].上海:同济大学出版社,1999:7-8.
[4]安瑞景.对分段函数与初等函数关系的讨论[J].天津工业大学学报,2001,20(1):40-44.
[5]张永明.分段函数与初等函数之间的关系.[J].曲阜师范大学学报,2000,26(4):29-31.
[6]腾文凯.分段函数是否为初等函数的探讨[J].承德民族师专学报,1997,(2):70-73.

Notes on Elementary Function

SUN Shu-dong
(Xinjiang College for Police Officers, Urumqi, Xinjiang 830011)

Abstract: This paper discusses how to decide if a function is a basic elementary function and what elementary function is composed of as well as how to decide if a function is an elementary function. Besides, some personal views on the definition of elementary functions are put forward.

Key words: Basic elementary function; Elementary function; Segmented function; Non-elementary function