IKDV方程及MRLW方程的精确解

杨晓侠,曹欣杰
(平顶山学院 数学与信息科学学院,河南 平顶山 467000)

【摘　要】在mathematica的帮助下研究了IKDV方程及MRLW方程,得到了它们的新的精确解。

【关键词】齐次平衡法;IKDV方程;MRLW方程;精确解
【中图分类号】O175.2　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2010)04-0030-02

引言

随着科学技术的飞速发展,非线性现象在自然科学及社会科学领域的作用越来越显著。物理、化学、生物甚至经济研究中都存在着大量的非线性问题,这些问题最后往往都可以用非线性方程来描述。因此,如何求解这些非线性方程就成为人们研究的一个重要课题。近年来,人们在这方面做了很多有益的工作,找到了一些行之有效的方法。例如:齐次平衡法[1,2],双曲正切函数展开法[3-6],试探函数法[7-9]等等。本文利用变换并结合齐次平衡法,在mathematica的帮助下研究IKDV方程

$$u_1+uu_x-u_{xxt}+u_{xxx}=0 \tag{1}$$

及MRLW方程

$$u_t+u_x-u^2u_x-u_{xxt}=0 \tag{2}$$

的精确解。

1 方法概述

设一般的非线性演化方程为

$$N\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\cdots\right)=0 \tag{3}$$

为求得其解,首先令 $\xi=x-ct$(c是待定非零常数),将其代入方程,得到关于该偏微分方程对应的常微分方程。设该常微分方程有解

$$u=\sum_{k=-n}^{n}a_kY^k \tag{4}$$

其中 $Y=\tanh\mu\xi$,$a_k(k=-n,\cdots,-1,0,1,\cdots,n)$,$\mu$为待定常数。利用齐次平衡法确定$n$的值,并将$u=\sum_{k=-n}^{n}a_kY^k$代入常微分方程,得到关于$Y$的代数方程。然后令此代数方程中$Y$的各次幂的系数为零得到一个代数方程组,再利用mathematica解此方程组并将其结果代入(4)即求得方程(3)的精确解。

2 应用举例

令 $\xi=x-ct$(其中c是非零常数),将其代入方程(1)和方程(2),就得到这两个偏微分方程对应的常微分方程:

$$-cu'+uu'+cu'''+u'''=0 \tag{5}$$

和

$$-cu'+u'+u^2u'+cu'''=0 \tag{6}$$

2.1 IKDV方程

对方程(5),设其有解$u=\sum_{k=-n}^{n}a_kY^k$,其中$Y=\tanh\mu\xi$。利用齐次平衡法可知$n=2$,从而

$$u=a_{-2}Y^{-2}+a_{-1}Y^{-1}+a_0+a_1Y+a_2Y^2 \tag{7}$$

将其代入方程(5),再在方程两边令Y^k系数为零,得到以下方程组

$$c\mu a_1+c\mu a_{-1}-\mu(a_0a_1+a_0a_{-1}+a_{-2}a_1+a_{-1}a_2)+2c\mu^3a_1+2c\mu^3a_{-1}+2\mu^3a_{-1}=0$$

$$2c\mu a_2-2\mu a_0a_2-\mu a_1^2+16c\mu^3a_2+16\mu^3a_2=0$$

$$c\mu a_1-\mu a_0a_1+3\mu a_1a_2-\mu a_{-1}a_2+8c\mu^3a_1+8\mu^3a_1=0$$

$$2c\mu a_2-2\mu a_0a_2-\mu a_1^2+2\mu a_2^2+40c\mu^3a_2+40\mu^3a_2=0$$

$$\mu a_1a_2+2c\mu^3a_1+2\mu^3a_1=0$$

$$\mu a_2^2+12c\mu^3a_2+12\mu^3a_2=0$$

$$2c\mu a_{-2}-2\mu a_{-2}a_0-\mu a_{-1}^2+16c\mu^3a_{-2}+16\mu^3a_{-2}=0$$

$$c\mu a_{-1}-\mu a_{-1}a_0-\mu a_{-2}a_1+3\mu a_{-2}a_{-1}+8c\mu^3a_{-1}+8\mu^3a_{-1}=0$$

$$2c\mu a_{-2}-2\mu a_{-2}a_0-\mu a_{-1}^2+2\mu a_{-2}^2+40c\mu^3a_{-2}+40\mu^3a_{-2}=0$$

$$\mu a_{-2}a_{-1}+2c\mu^3a_{-1}+2\mu^3a_{-1}=0$$

$$\mu a_{-2}^2+12c\mu^3a_{-2}+12\mu^3a_{-2}=0$$

利用mathematica得到下列三种形式的解

$$a_0=c+8\mu^2+8c\mu^2,\ a_{-2}=-12(\mu^2+c\mu^2),\ a_2=a_1=a_{-1}=0 \tag{8}$$

$$a_0=c+8\mu^2+8c\mu^2,\ a_2=-12(\mu^2+c\mu^2),\ a_{-2}=a_1=a_{-1}=0 \tag{9}$$

$$a_0=c+8\mu^2+8c\mu^2,\ a_2=-12(\mu^2+c\mu^2),\ a_{-2}==-12(\mu^2+c\mu^2),\ a_1=a_{-1}=0 \tag{10}$$

将(8)-(10)式代入(7)式并将$\xi=x-ct$回代即得到方程(5)的三种形式的解

$$u_1(x,t)=c+8\mu^2+8c\mu^2-12(\mu^2+c\mu^2)[\tanh\mu(x-ct)]^{-2}$$

$$u_2(x,t)=c+8\mu^2+8c\mu^2-12(\mu^2+c\mu^2)[\tanh\mu(x-ct)]^{2}$$

$$u_3(x,t)=c+8\mu^2+8c\mu^2-12(\mu^2+c\mu^2)[\tanh\mu$$

收稿日期:2010-09-10
作者简介:杨晓侠(1977-　),女,河南汝州人,讲师,硕士研究生,研究方向:偏微分方程。

$(x-t)]^{-2}-12(\mu^2+c\mu^2)[\tanh\mu(x-ct)]^2$

2.2 MRLW方程

对于方程(6)，设其有解$u=\sum_{k=-n}^{n} a_k Y^k$，其中$Y=\tanh\mu\xi$。利用齐次平衡法可知n=1，从而

$$u=a_{-1}Y^{-1}+a_0+a_1Y \tag{11}$$

将其代入方程(6)，再在方程两边令Y^k系数为零，得到以下方程组

$$-ca_1-ca_{-1}+a_1+a_{-1}+a_0^2a_1+a_{-1}a_0^2+a_{-1}a_1^2+a_{-1}^2a_1-2c\mu^2a_1-2c\mu^2a_{-1}=0$$

$$\mu a_0a_1^2=0$$

$$\mu a_1^3+6c\mu^3a_1=0$$

$$\mu a_{-1}^2a_0=0$$

$$\mu a_{-1}^3+6c\mu^3a_{-1}=0$$

$$c\mu a_1-\mu a_1-\mu a_0^2a_1+\mu a_1^3-\mu a_{-1}a_1^2+8c\mu^3a_1=0$$

$$c\mu a_{-1}-\mu a_{-1}-\mu a_{-1}a_0^2-\mu a_{-1}^2a_1+\mu a_{-1}^3+8c\mu^3a_{-1}=0$$

利用mathematica有解

$$a_0=0,c=\frac{1}{1+2\mu^2},a_{-1}=0,a_1=-\frac{i\sqrt{6}\mu}{\sqrt{1+2\mu^2}} \tag{12}$$

将(12)式代入(11)式并将$\xi=x-ct$回代即得到方程(6)的解

$$u(x,t)=-\frac{i\sqrt{6}\mu}{\sqrt{1+2\mu^2}}\tanh\left(\mu x-\frac{\mu}{1+2\mu^2}t\right)$$

注释及参考文献：

[1]Wang M L.Solitary wave solution for Boussinesq[J].Physics Letters A，1995，199：162-172.

[2]Fan E G and Zhang H Q.T he homogeneous balance method for solving nonlinear soliton equations[J].Acta Physics Sinica，1998，47(3)：353-362.

[3]Parkes E J and Duffy B R.Travelling solitary wave solutions to a compound Kdv-Burgers equation[J].Physics Letters A，1997，229：217-220.

[4]Fan E G.Extended tanh-funtion method and its applications to nonlinear equations[J].Physics Letters A，2000，277：212-218.

[5]Zhang J F.New exact solitary wave solutions of the KS equations[J].International Journal of Theoretical Physics，1999，38(6)：1829-1834.

[6]Demiray H.A note on the exact traveling wave solution to the Kdv-Burgers equation[J].Wave Motion，2003，38：367-369.

[7]Kudryashow N A.Exact solutions of the generalized kuramoto Sivashinsky equations[J].Physics Letters A，1990，147：287-292.

[8]Liu S K，Fu Z T and Liu S D et al.A simple fast method in finding particular solutions of some nonlinear PDE[J].Applied Mathematics and Mechnics，2001，22(3)：281-286.

[9]Fu Z T，Liu S D and Liu S K et al.New solutions to generalized mKdv equation[J].Communication in Theoretical Physics，2004，41：25-28.

Explicit and Exact Solutions to IKDV Equation and MRLW Equation

YANG Xiao-xia，CAO Xin-jie

(School of Mathematics and Informatics，Pingdingshan University，Pingdingshan，Henan 467000)

Abstract: With the help of mathematics software，this paper studied IKDV Equation and MRLW Equation and obtained the new explicit and exact solutions.

Key words: Homogeneous balance method；IKDV equation；MRLW equation；Exact solution