高等数学中的邻域简介

曹 莉,李宗学**
(内蒙古医学院 数学教研室,内蒙古 呼和浩特 010110)

【摘 要】本文介绍了邻域及其性质,并总结了邻域在高等数学中的应用,体现了邻域在高等数学中的重要作用,有助于理解高等数学中的一些基本概念。

【关键词】邻域;极限;连续性;有界性;有限覆盖
【中图分类号】O13 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2010)04-0027-03

1 邻域基础知识介绍

邻域对于高等数学的研究具有十分重要的意义,正是邻域族的彼此交迭、关联,形成了一个数的统一体,使得数在其上能变活,这就是数轴给实数集带来的邻域结构特征,从而也开辟了对函数值的邻域性和"活"性认识。如果没有邻域结构观,则很难建立起极限概念、微分概念、聚点概念等高等数学基本概念,所以说邻域对高等数学的迅速发展做出了巨大的贡献,为了更好的学习理解高等数学中的经典概念,笔者对邻域作比较详细的介绍和归纳。下面首先介绍邻域的概念和性质:

1.1 邻域的概念

定义1.1.1 设$X=(X,d)$为距离空间,$x_0\in X$,$\delta>0$,则集合$U(x_0,\delta)=\{x\in X|d(x,x_0)<\delta\}$称为$x_0$的$\delta$球形邻域。特别地有$\overset{0}{U}(x_0,\delta)=U(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$,叫做$x_0$的空心邻域.

1.2 邻域的性质(X=(X,d)为距离空间)

性质1.2.1 邻域是集合,且满足:有限个邻域的交集还是邻域;有限个邻域的并集还是邻域。

性质1.2.2 邻域可以成族。比如可记为$U(x)=\{U^r(x,\delta)|\delta>0,r\in\{1,2,\cdots,n\}\}$。

性质1.2.3 邻域可以互相交迭形成连续统空间。

设$\Omega\subset X$为有界集,则可找到Ω上元素子集$\{x_i\}$,使其邻域族$\{U(x_i)\}$能覆盖Ω,即$\Omega\subset\bigcup_i U(x_i)$。特别当$\Omega$为有界闭集时,只须有限个(开)邻域$\{U(x_i,\delta_i)\}_1^m$即可覆盖$\Omega$,即$\Omega\subset\bigcup_{i=1}^m U(x_i,\delta_i)$,这就是著名的"有限覆盖"定理。

性质1.2.4 若$\Omega\subset X$为有限点集,这时$\forall x\in\Omega$的邻域可根据具体情况来定义。

性质1.2.5 从意识上讲,对于点x,其(空心)邻域$\overset{0}{U}(x,\delta)$可看成一个非点的空间,因而点x与其$\overset{0}{U}(x,\delta)$间可看作二象对偶关系。

性质1.2.6 邻域具有伸缩性.

性质1.2.7 当δ不为无穷小时,若$U(x,\delta)\subset X$,由于X可度量,$U(x,\delta)$也是可度量的.

2 邻域在高等数学中的应用

2.1 邻域在某些定义中的应用

定义2.1.1 设$\{a_n\}$为数列,a为定数。若$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in N^+$,使得$\{a_{N+1},a_{N+2},\cdots\}\subset U(a,\varepsilon)$,则称数列$\{a_n\}$收敛于a,记为$\lim_{n\to\infty}a_n=a$。

分析 以前在数学分析书上曾学过的定义是:$\lim_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+$,使得当$n>N$时,有$|a_n-a|<\varepsilon$。从几何意义上看:"当$n>N$时,有$|a_n-a|<\varepsilon$"意味着:所有下标大于N的项$a_n$都在邻域$U(a,\varepsilon)$内。由此,得到以上定义。

定义2.1.2 设f为定义在R上的函数,A为定数。若对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得$f(\overset{0}{U}(x_0,\delta))\subset U(A,\varepsilon)$,则称函数f当$x\to x_0$时以A为极限,记为$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$。

分析 对照以前学过的极限定义:$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$。定义中,不等式$0<|x-x_0|<\delta$等价于$x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta)$而不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$等价于$f(x)\in U(A,\varepsilon)$。由此,得出了上述定义。

定义2.1.3 设函数f在x_0的某个邻域$U(x_0)$内有定义,若对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得$f(U(x_0,\delta)\cap U(x_0))\subset U(f(x_0),\varepsilon)$,则称函数f在$x_0$点连续。

分析 因为函数f在x_0点连续$\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。也就是说函数在某一点的连续性是通过极限来刻画的,由定义2.1.2知上述结论成立。

定义2.1.4 设f为定义在区间G上的函数,若对G内任一点x_0,都有$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得$f(U(x_0,\delta)\cap G)\subset U(f(x_0),\varepsilon)$,则称函数f为G上的连续函数。

分析 以前学过若函数f在其定义区间上每一点都连续,则称f为连续函数。因此,由定义2.1.3知

收稿日期:2010-09-10
作者简介:曹 莉(1984-),男,四川自贡人,硕士,助教,主要从事高等数学,插值法与逼近论研究。**为通讯作者。

上述结论成立。

定义2.1.5 若函数f在点x_0的某邻域$U(x_0)$内对一切$x \in U(x_0)$有

$f(U(x_0)) \subset (-\infty, f(x_0)]$ $(f(U(x_0)) \subset [f(x_0), +\infty))$,则称函数f在点$x_0$取得极大(小)值,称点$x_0$为极大(小)值点。

2.2 邻域在某些定理证明中的应用

2.2.1 有限覆盖定理

定义 设S为数轴上的点集,H为邻域的集合(即H的每一个元素都是某点的邻域)。若S中的任何一点都含在H中至少一个邻域内,则称H为S的一个开覆盖,或称H覆盖S。若H中邻域的个数是无限(有限)的,则称H为S的一个无限覆盖(有限覆盖)。

有限覆盖定理 设H为闭区间[a,b]的一个(无限)覆盖,则从H中可选出有限个邻域来覆盖[a,b]。

证明 用反证法 假设定理的结论不成立,即不能用H中有限个邻域来覆盖[a,b]。

将[a,b]等分为两个子区间$[a,\frac{a+b}{2}]$和$[\frac{a+b}{2},b]$,则其中至少有一个子区间不能用H中有限个邻域来覆盖,记这个子区间为$[a_1,b_1]$,则$[a_1,b_1] \subset [a,b]$,且$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$。

再将$[a_1,b_1]$等分为两个子区间$[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$和$[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$,同样,其中至少有一个子区间不能用H中有限个邻域来覆盖,记这个子区间为$[a_2,b_2]$,则$[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$,且$b_2-a_2=\frac{1}{2^2}(b-a)$。

重复上述步骤并不断地进行下去,则得到一个闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$,它满足

$[a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}]$, n=1,2,…,

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a) \to 0 (n \to \infty)$$

即$\{[a_n,b_n]\}$是区间套,且其中每一个闭区间都不能用H中有限个邻域来覆盖。

由区间套定理,存在唯一的一点$\xi \in [a_n,b_n]$, n=1,2,…。由于H是[a,b]的一个开覆盖,故存在H中邻域$U(x_0,\delta) \in H$,使$\xi \in U(x_0,\delta)$。于是,当n充分大时有$[a_n,b_n] \subset U(x_0,\delta)$。这表明$[a_n,b_n]$只须用H中的一个邻域就能覆盖,与挑选$[a_n,b_n]$时的假设"不能用H的有限个邻域来覆盖"相矛盾。从而证得必存在属于H的有限个邻域能覆盖[a,b]。

2.2.2 应用有限覆盖定理证明有界性定理

有界性定理 若函数f在闭区间[a,b]上连续,则f在[a,b]上有界。

证明 由连续函数的局部有界性,$\forall x' \in [a,b]$,$\exists U(x',\delta_{x'})$及$M_{x'}>0$,使得

$|f(x)| \le M_{x'}$, $x \in U(x',\delta_{x'}) \cap [a,b]$

考虑邻域集合$H=\{U(x',\delta_{x'}) | x' \in [a,b]\}$,

显然H是[a,b]的一个无限开覆盖。由有限覆盖定理,存在H的一个有限子集

$H^*=\{U(x_i,\delta_i) | x_i \in [a,b], i=1,2,\cdots,k\}$

覆盖了[a,b],且存在正数$M_1, M_2, \cdots M_k$,使得对一切$x \in U(x_i,\delta_i) \cap [a,b]$有$|f(x)| \le M_i$, i=1,2,…,k。令$M=\max\limits_{1\le i\le k} M_i$,

则对任何$x \in [a,b]$,x必属于某个$U(x_i,\delta_i)$,即$|f(x)| \le M_i \le M$。即证得f在[a,b]上有界。

2.2.3 应用有限覆盖定理证明一致连续性定理

一致连续性定理 若函数f在闭区间[a,b]上连续,则f在[a,b]上一致连续。

证明 由f在[a,b]上的连续性,任给$\varepsilon>0$,$\forall x \in [a,b]$,$\exists \delta_x>0$,使得当$x' \in U(x,\delta_x) \cap [a,b]$时有

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

考虑邻域集合$H=\{U(x,\frac{\delta_x}{2}) \cap [a,b] | x \in [a,b]\}$,

显然H是[a,b]的一个开覆盖。由有限覆盖定理,存在H的一个有限子集

$H^*=\{U(x_i,\frac{\delta_i}{2}) | i=1,2,\cdots k\}$

覆盖了[a,b]。记$\delta=\min\limits_{1\le i\le k}\{\frac{\delta_i}{2}\}>0$。

对任何$x', x'' \in [a,b]$, $|x'-x''|<\delta$必属于H^*中的某个邻域,设$x' \in U(x_i,\frac{\delta_i}{2})$,即$|x'-x_i|<\frac{\delta_i}{2}$,此时有

$$|x''-x_i| \le |x''-x'|+|x'-x_i|<\delta+\frac{\delta_i}{2} \le \frac{\delta_i}{2}+\frac{\delta_i}{2}=\delta_i$$

由(*)式知$|f(x')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$和$|f(x'')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$。

由此得$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。所以f在[a,b]上一致连续。

注释及参考文献:

[1]同济大学大学数学系.高等数学(第六版)[M].北京:高等教育出版社,2007.4.

[2]匡继昌.实分析与泛函分析[M].北京:高等教育出版社,2002.8.

[3]熊金城.点集拓扑讲义[M].北京:高等教育出版社,1998.5.

[4]顾恩国.邻域概念的推广及应用[J].南都学坛(自然科学版),1993,14(2):24-26.

The Application of Neighborhood in Higher Mathematics

CAO Li, LI Zong-xue

(Department of Mathematics, Inner Mongolia College, Hohhot, Inner Mongolia 010110)

Abstract: In this paper, we introduce the neighborhood first, then we summary some applications of Neighborhood in Higher Mathematics to show the importance of neighborhood, and we hope that it is helpful to understand some basic concepts of Higher Mathematics.

Key words: Neighborhood; Limit; Continuity; Bounded; Finite covering theorem

(上接26页)

注释及参考文献:

[1]张元林.积分变换(第四版)[M].北京:高等教育出版社,2003.5.

[2]白艳萍,雷英杰,扬明.复变函数与积分变换[M].北京:国防工业出版社,2004.8.

[3]华东师范大学数学系.数学分析(第二版)[M].北京:高等教育出版社,1991.10.

Several Simple Methods in Proving Poisson Integral

QIAN Xue-Ming

(Wuxi Professional College of Science and Technology, Wuxi, Jiangsu 214028)

Abstract: In generally textbooks of *Advanced Mathematics*, the methods of solving Poisson integral was less mentioned. It encountered Poisson integral in practical problem usually, such as heat conduction problem or probability problem. It couldn't solve integral value with New-leibniz formula, because the primitive function of integrand wasn't elementary function. This paper introduces several simple methods of solving Poisson integral, due to its complex in common.

Key words: Poisson integral; Laplace transform; Generalized double integral; Gamma-functi on