概率论教学中需要注意的几个问题

陆海霞
(宿迁学院 教育系,江苏 宿迁 223800)

【摘 要】本文列出学生在学习概率论这门课程中几个易混淆概念和几个易错问题,并结合学生常见错误进行剖析,从而使学生掌握概念内涵,弄清概念与概念之间的联系与区别,在理解的基础上轻松学习这门课程。

【关键词】互斥;独立;分布函数;不相关
【中图分类号】O211-42 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2010)01-0042-02

概率统计课程是高等院校中最重要的公共基础课之一,它内容丰富,知识点多,实用性强。笔者在多年的教学中发现,许多学生由于基本概念理解不透,从而导致概念与概念之间关系不清,例如两个事件互斥与独立的关系,随机变量X,Y相互独立与不相关等。本文列出学生在学习概率论这门课程中几个易混淆概念和几个易错问题,并结合学生常见错误进行剖析,从而使学生弄懂概念、纠正错误、把握实质,在理解的基础上轻松学习这门课程。

1 两事件互斥与相互独立

1.1 定义

定义1 若事件A,B不能同时发生,即$AB=\phi$,则称A,B互不相容或互斥.

定义2 若事件A,B满足$P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件A,B相互独立.

由上述定义可知,两事件A,B互斥是指A,B不能同时发生,用集合的语言描述是指集合A,B没有公共元素。而事件A,B相互独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$,还可以证明下列结论成立:

$P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A})=P(B)(0<P(A)<1)$

$P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\overline{B})=P(A)(0<P(B)<1)$

即无论A(或B)发生与否不影响B(或A)发生的概率,这就是人们通常所说的两事件“互不影响”.

1.2 两者联系

在教学中,常常有学生形成这样的错误认识:相互独立的两事件必互斥(或者:互斥的两事件必定相互独立).事实上,两事件互斥与相互独立有下列关系:

定理1 设A,B任意两个随机事件,且$P(A)>0,P(B)>0$,则

(1)若A,B互斥,则它们不独立;(2)若A,B独立,则它们不互斥.

证(1)因为A,B互斥,所以$P(AB)=0$,又$P(A)>0,P(B)>0$

从而$P(AB)\neq P(A)P(B)$,所以事件A,B不独立.

(2)因为A,B独立,所以$P(AB)=P(A)P(B)$,又$P(A)>0,P(B)>0$

从而$P(AB)>0$,即$AB\neq\phi$,所以事件A,B不互斥.

2 随机变量的分布函数

2.1 定义

定义3 设X是一个随机变量,称定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数值在区间[0,1]上的实值函数

$F(x)=P\{X\leqslant x\}\quad(-\infty<x<+\infty)$

为随机变量X的分布函数.

2.2 F(x)的求法

根据定义,对于任意的$x\in R$,此时函数值$F(x)$等于事件$\{X\leqslant x\}$的概率。下面,就X分别是离散型和连续型随机变量情形,分别讨论$F(x)$的求法。

例1 设离散型随机变量X的分布律为$P\{X=x_i\}=P_i,i=1,2,3,\cdots,n$求X的分布函数.

分析 X的n个可能取值$x_1,x_2,\cdots,x_n$将数轴分成n+1段,因此分别就自变量X落在这n+1个不同区间时,讨论$F(x)$的取值.

当$x<x_1$时,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{\phi\}=0$;

当$x_1\leqslant x<x_2$时,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=x_1\}=p_1$;

当$x_2\leqslant x<x_3$时,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=x_1或X=x_2\}=p_1+p_2$

(常见错误:当$x_2\leqslant x<x_3$时,)$F(x)=p_2$)

当$x_{n+1}\leqslant x<x_n$时,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=x_1或\cdots或X=x_{n-1}\}=p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}$

当$x\geqslant x_n$时,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{\Omega\}=1$

结论:离散型随机变量X的n个可能取值将数轴分成n+1段,分布函数$F(x)$的表达式也相应分成n+1段,$F(x)$在每段上的取值均为一个常数,并且该常数等于X取小于x的所有可能值的概率之和($F(x)$在首段值为0,最后一段值为1).

收稿日期:2010-01-15

作者简介:陆海霞(1976-),女,江苏盐城人,讲师,硕士,研究方向:非线性泛函分析。

例2　设连续型随机变量X的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 1, & 1\le x<\frac{3}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$,求X的分布函数.

分析　根据连续性随机变量及其分布函数的定义,$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

由于在上式求分布函数F(x)表达式中,被积函数f(t)表达式被t=0,1,$\frac{3}{2}$分成四段,因此F(x)表达式也相应分成四段,即

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{x}tdt=\frac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ \int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{1}tdt+\int_{1}^{x}1dt=x-\frac{1}{2}, & 1\le x<\frac{3}{2}\\ \int_{-\infty}^{0}0dt+\int_{0}^{1}tdt+\int_{1}^{\frac{3}{2}}1dt+\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty}0dt=1, & x\ge\frac{3}{2}\end{cases}$$

结论:由密度函数求分布函数就是求密度函数f(t)在(-∞,x]上的积分,当密度函数是分段函数时,分布函数也是分段函数,并且密度函数分成几段,分布函数也相应分成几段。

3 随机变量的独立性与不相关性

3.1 定义

定义4　设X,Y为随机变量.如果对于任意实数x,y,事件{X≤x}、{Y≤y}是相互独立的,即

P{X≤x,Y≤y}=P{X≤x}P{Y≤y}

那么称X,Y相互独立.

定义5　如果随机变量X,Y的相关系数$\rho_{X,Y}=0$,则称X,Y不相关.

随机变量的相互独立与不相关所反映的不是同一种关系,随机变量的独立性反映的是两随机变量之间相互不影响,而随机变量不相关只是就线性关系而言(即X,Y不成线性关系)。

3.2 两者联系

定理2　若随机变量X,Y相互独立,则X,Y一定不相关.

证　若随机变量X,Y相互独立,则E(XY)=E(X)E(Y),

从而Coν(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0

即有$\rho_{X,Y}=0$,所以X,Y不相关.

注1　定理2的逆否命题也成立,即若随机变量X,Y相关,则X,Y一定不相互独立.

注2　定理2的逆命题不真.即若随机变量X,Y不相关,则X,Y不一定相互独立.

例3　设二维随机变量(X,Y)服从G={(x,y)|$x^2+y^2\le1$}上的均匀分布,证明:X,Y既不相关也不独立.

证　(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

X的边缘密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1\le x\le1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

Y的边缘密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1\le y\le1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

所以,E(X)=E(Y)=0

$$E(XY)=\iint_G xy\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta drd\theta=0$$

从而Coν(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0

即有$\rho_{X,Y}=0$,所以X,Y不相关.

又$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$所以X,Y不独立.

注释及参考文献:

[1]同济大学应用数学系.概率统计简明教程[M].北京:高等教育出版社,2003.

[2]盛骤,谢式千.概率论与数理统计及其应用[M].北京:高等教育出版社,2004.

[3]李永明.概率论中一些易混淆的概念的教学探讨[J].大学数学,2008,24(5):161-164.

[4]张晓明.关于随机变量分布函数[J].福建工程学院学报:2007,5(4):369-371.

[5]殷风.随机变量相互独立与不相关[J].忻州师范学院学报,2007:23(2):22-23.

Some Problems That Need Attention in the Teaching of Probability Theory

LU Hai-xia

(Education Department, Suqian College, Suqian, Jiangsu 223800)

Abstract: This paper researches into some confusable concepts and some error-prone problems that students encounter in learning probability theory, so that students master the concept of connotation and understand the links and differences between the concepts. Thus students study this course easily on the basis of understanding.

Key words: Disjoint; Independent; Distribution function; Non-correlation