

巧用函数的对称性及辅助函数作函数图像

王小敏

(江苏省泰州机电高等职业技术学校, 江苏 泰州 225300)

【摘要】函数是数学的重要基础,函数性质的考察和应用重点和热点,而函数图像是函数性质的一种直观表现。函数图像的对称性,充分体现了数学的对称美,具有很好的数学价值。

【关键词】函数;图像;对称性;辅助函数

【中图分类号】O174 **【文献标识码】**A **【文章编号】**1673-1891(2010)01-0040-02

函数是数学的重要基础,函数性质的考察和应用重点和热点,而函数图像是函数性质的一种直观表现。函数图像的对称性,充分体现了数学的对称美,具有很好的数学价值。本文旨在应用函数图像自身的对称性作图,或构造一个辅助函数,使它的图像与已知函数的图像成轴对称或中心对称图形,进而利用辅助函数的图像,作出已知函数的图像。

命题1 若函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(x+a)$,则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称,反之亦然。

证明 设点 $P(k, h)$ 是函数 $f(x)$ 的图像上一点,即 $h=f(k)$,则点 P 关于直线 $x=a$ 的对称点为 $P'(2a-k, h)$ 。

$$\ominus f(2a-k)=f[a-(k-a)]=f(k-a+a)=f(k)=h$$

$\therefore (2a-k, h)$ 是 $f(x)$ 图像上的点。

\therefore 函数 $f(x)$ 图像上任一点关于直线 $x=a$ 对称的点都在 $f(x)$ 的图像上,即函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称。

例1 作函数 $y=|2^{|x-1|}-2|$ 的图像。

分析 $\ominus f(1-x)=f(1+x)$

$\therefore f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称。

作法 先作 $y=|2^{|x-1|}-2|$ ($x \geq 1$)的图像即 $y=|2^{x-1}-2|$ ($x \geq 1$)的图像,再作 $y=|2^{x-1}-2|$ ($x \geq 1$)的图像关于直线 $x=1$ 的对称图形。

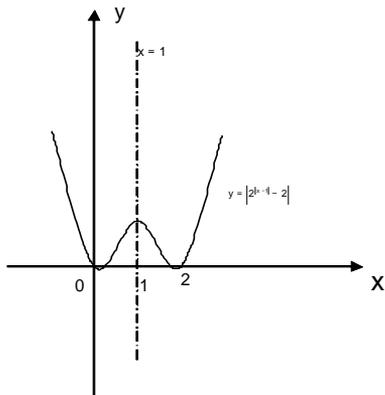


图1 即为函数 $y=|2^{|x-1|}-2|$ 的图像

说明 本例所研究的函数图像本身是轴对称图形,它的对称轴为 $x=1$ 。

命题2 函数 $f(x+a)$ 与函数 $f(b-x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称。

证明 设点 $P(k, h)$ 是函数 $f(x+a)$ 的图像上一点,即 $h=f(k+a)$,则点 P 关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 的对称点为 $P'(b-a-k, h)$ 。

$$\ominus f(a+k)=f[b-(b-a-k)]=h$$

$\therefore P'(b-a-k, h)$ 是函数 $f(b-x)$ 的图像上的点。

即函数 $f(x+a)$ 的图像上任一点关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称的点都在 $f(b-x)$ 的图像上;同理可证函数 $f(b-x)$ 的图像上任一点关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称的点都在 $f(x+a)$ 的图像上。所以函数 $f(x+a)$ 与 $f(b-x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{b-a}{2}$ 对称。

例2 作函数 $y=\log_2^{(2-x)}$ 的图像。

分析 由命题2知, $y=\log_2^{(2-x)}$ 的图像与 $y=\log_2^{(x+0)}$ 即 $y=\log_2^x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称。

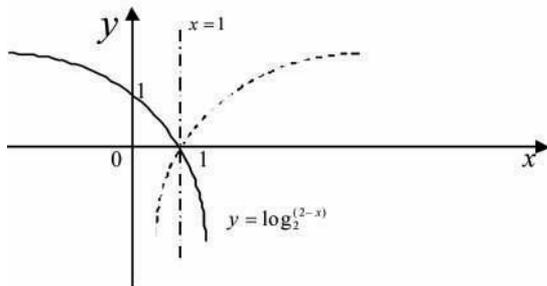


图2

作法 先作 $y=\log_2^x$ 的图像,再作 $y=\log_2^x$ 图像关于直线 $x=1$ 的对称图形,图2即为函数 $y=\log_2^{(2-x)}$ 的图像。

上例的实质是利用已知函数(即辅助函数)的图像作出所求函数的图像。

命题3 函数 $y=f(x+a)+m$ 与函数 $y=-f(b-x)+n$ 的图像关于点 $(\frac{b-a}{2}, \frac{m+n}{2})$ 对称。

命题3的证明与命题2类似,此处从略。

例3 在同一坐标系中作函数 $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}+1$ 、 $y=(3-x)^{\frac{1}{2}}+1$ 、 $y=-(x+2)^{\frac{1}{2}}-1$ 的图像。

分析 由命题2知, $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}+1$ 与 $y=(3-x)^{\frac{1}{2}}+1$ 的图像关于直线 $x=2$ 轴对称;由命题3知, $y=(3-x)^{\frac{1}{2}}+1$ 与 $y=-(x+2)^{\frac{1}{2}}-1$ 的图像关于点 $A(\frac{1}{2}, 0)$ 中心对称。

如图3,先作 $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}+1$ 的图像,再根据对称性即可作出所有函数图像。

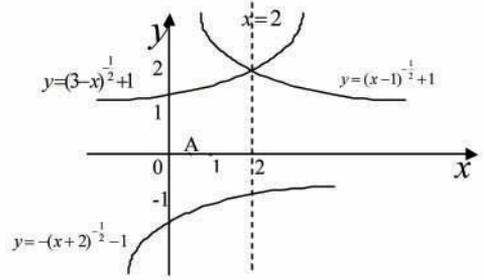


图 3

注释及参考文献:

- [1]吴翔雁.四次函数图像的对称性[J].上海中学数学,2008(3):37.
- [2]仇志刚.运用空间图形的对称性解题举隅[J].中国西部科技,2008(35):78-80.
- [3]吴健.巧用式的对称性解题一例[J].中学生数学,2008(4).
- [4]陈建勋.函数图像的对称性探究[J].考试(教研版),2008(11):89.
- [5]高建国,顾海燕.对称性和周期性[J].数理天地(高中版),2008(6):4.
- [6]刘书安.对称思想在中学物理中的应用[J].新课程(教育学术版),2008(12).
- [7]刘英.函数对称性的探究[J].中学生数理化(高考版),2008(4):10-11.
- [8]武燕,张丽,李靖.第二类曲线和曲面积分的对称性[J].中国教育技术装备,2008(18):33-34.
- [9]许若文.《雪》:隐秘对称性的谜面与谜底[J].当代作家评论,2008(3):54-58.

To Make Function Images Cleverly With the Symmetrical Nature of Function and Aiding Functions

WANG Xiao-min

(Taizhou Higher Vocational Schools of Mechanic & Electronic Technology, Taizhou, Jiangsu 225300)

Abstract: Function is an important basis in Mathematics. It is important and urgent to analyze and apply the nature of function. Function image is the visual performance of the nature of function. The symmetrical nature of function fully embodies the beauty of symmetry, and it is of great mathematical value.

Key words: Function; Image; Symmetry; Aiding function