# 一类迭代方程的非单调解

辛邦颖
(西昌学院 数理系,四川 西昌 615022)

【摘 要】本文继[1]文之后继续讨论多项式型迭代方程$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$在$F(x)$非单调情形下连续解的存在性,同时讨论非单调解的唯一性和稳定性。

【关键词】多项式型迭代方程;单调性;连续解;唯一性;稳定性
【中图分类号】O175.13 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2010)01-0038-02

## 1 引言

迭代是自然界中一个普遍现象,最简单的迭代是我们熟悉的数学分析中函数的复合,同一个函数f(x)的多次复合称为函数f(x)的迭代。而以迭代为基本运算的等式就叫迭代函数方程,简称迭代方程。迭代方程伴随着迭代理论的发展,许多数学家的研究使这一领域形成一个完整的理论体系,成为与差分方程、动力系统、微分方程有着紧密联系的数学分支。早在一百多年前,Babbage、Abel、Isaacs、Jr.M.K.Fort、Kuczm等就开始了迭代函数方程的研究工作。我们更青睐于多项式型迭代方程

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x),\forall x\in I=[a,b] \tag{1}$$

其中f(x)是未知函数,F(x)是已知函数的研究,它较迭代根问题要复杂得多,也深得重视,从而使这一领域的研究非常活跃。Dhombres、Jarczyk、张伟年、Nabeya等研究了当F(x)是线性函数时的情形[2-8],当F(x)为非线性函数时,对方程(1)式的研究相对困难,赵立人构造了一致收敛的函数序列证明当n=2时(1)式连续解的存在性[9],此法不能证明方程(1)连续解的存在性,到1986年,张伟年利用在泛函空间中寻找不动点定理证明了(1)式连续解的存在性[10],随后又讨论了方程(1)式的可微解、对称解和特征解[11—14]。(1)式在F(x)单调递减和非单调情形下的凸解也被讨论[15,16]。在他们工作的启发下,[1]文讨论了在函数不需保持端点不变的情形下连续解的存在性,本文继[1],继续讨论(1)式在没有端点限制,F(x)非单调情形下连续解的存在性,同时讨论非单调解的唯一性和稳定性。

## 2 非单调函数的解

对于方程(1),设其满足下列条件:

(H1):$\lambda_1>0$,$\lambda_i\geqslant 0$,i=2,3⋯,n

(H2):$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,即规范化条件成立

并采用记号:C(I)={f(x)|f(x)为定义在[a,b]上连续实函数的全体},X(I,i,L)={f(x)∈I,a≤f(x)≤b,i(y−x)≤f(y)−f(x)≤L(y−x),∀x,y∈I,且y>x}C(I)关于范数‖f(x)‖=max{|f(x)|,∀x∈I}是一个banach空间。

引理2.1[15] X(I,−m,M)是C(I)上的一个紧凸子集。

引理2.2 若0<m<M,f(x),g(x)∈X(I,−m,M),则$\|f^n-g^n\|\leqslant\sum_{j=0}^{n}M^j\|f-g\|$,n=1,2,⋯,n。

定理2.3 若方程(1)满足条件($H_1$)和($H_2$),函数F(x)∈X(I,−M,M),并且存在m,使得当0<m<M,有$\frac{M_1}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i M^i}{\lambda_1}$及$m+\frac{-M_1}{\lambda_1}+\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i m^i}{\lambda_1}\geq 0$成立,则方程(1)存在连续非单调解f(x)∈X(I,−m,M)。

证明 构造映射:T:X(I,−m,M)→C(I),使得

$$Tf=\frac{F(x)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_1},\forall x\in I$$

由条件知:对∀x∈I,a≤Tf≤b成立。对任意x,y∈I,x>y,有:

$$\begin{aligned}Tf(x)-Tf(y)&=\frac{F(x)-F(y)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda i f^i(x)-\sum_{i=2}^{n}\lambda_i f^i(y)}{\lambda 1}\\&\leq(\frac{M_1}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i M^i}{\lambda_1})(x-y)\\&\leq M(x-y)\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}Tf(x)-Tf(y)&=\frac{F(x)-F(y)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda i f^i(x)-\sum_{i=2}^{n}\lambda_i f^i(y)}{\lambda 1}\\&\geq(\frac{-M_1}{\lambda_1}+\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i m^i}{\lambda_1})(x-y)\\&\geq -m(x-y)\end{aligned} \tag{4}$$

由此知Tf(x)是X(I,−m,M)上的自映射。又任取f,g∈X(I,−m,M),有

$$\begin{aligned}\|Tf-Tg\|&=\left\|\frac{F(x)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_1}-\frac{F(x)}{\lambda_1}+\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i g^i(x)}{\lambda_1}\right\|\\&=\left\|\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i g^i(x)}{\lambda_1}\right\|\\&\leq\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\sum_{j=0}^{i-1}M^j\|f-g\|\end{aligned} \tag{5}$$

从而,T是X(I,−m,M)的连续自映射。由Schauders不动点定理,Tf有一不动点f∈X(I,−m,

收稿日期:2010-01-10
作者简介:辛邦颖(1972- ),女,讲师,四川西昌人,硕士,主要研究方向为微分方程与动力系统。

M)，使得Tf(x)=f(x)成立，即：

$$Tf(x)=\frac{F(x)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_1}=f(x)$$，从而定理得证。

## 3 非单调解的性质

定理3.1　若方程(2)满足条件($H_1$)和($H_2$)，且

$$\lambda_1>\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\sum_{j=0}^{i-1}M^j \tag{6}$$

则方程(1)在X(I,–m,M)上存在唯一解。

证明　由定理2.1的证明和(6)式，存在0<α<1有

$$\|Tf-Tg\|\le\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\sum_{j=0}^{i-1}M^j\|f-g\|<\alpha\|f-g\|$$

由Banach不动点定理知方程(1)有唯一解f∈X(I,–m,M)。

定理3.2　若方程(1)满足定理(2.3)的条件且

$$\lambda_1>\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\sum_{j=0}^{i-1}M^j>0$$

则方程(1)存在解f连续依赖函数F(x)。

证明　设有多项式迭代方程$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$和$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g^i(x)=G(x)$，其中F(x)、G(x)∈X(I,–$M_1$,$M_1$)，f(x)、g(x)∈X(I,–m,M)，有

$$\|f-g\|=\left\|\frac{F(x)}{\lambda_1}-\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i f^i(x)}{\lambda_1}-\frac{G(x)}{\lambda_1}+\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i g^i(x)}{\lambda_1}\right\|$$

$$\le\frac{\|F-G\|}{\lambda_1}+\max_{x\in I}\left|\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i(f^i(x)-g^i(x))}{\lambda_i}\right|$$

$$\le\frac{\|F-G\|}{\lambda_1}+\frac{\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\sum_{j=0}^{i}M^j\|f-g\|}{\lambda_i}$$

所以，$\|f-g\|\le(\lambda_1-\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\sum_{j=0}^{i-1}M^j)^{-1}\|F-G\|$

定理得证。

## 注释及参考文献：

[1]辛邦颖，徐娟.一类多项式型迭代方程连续解的存在性[J].四川大学学报，2009，46(4)：897–900.

[2]J.G.Dhombres.Iteration lineaire d,ordre deux,Publ.Math.Debrecen 24(1977)177–187.

[3]W.Jarczyk,.On an equation of linear iteration，Aequationes Math.51(1996)：303–310.

[4]J.Matkowski,W.Zhang.On the polynomial–like iterative functional equation，in：T.M.Rassias(Ed.)，functional Equations and Inequalities，in:Math.Appl.,vol.518 K Academic，Dordrecht，2000，pp.145–170.

[5]J.Matkowski,W.Zhang.On linear dependence of iterates，J.Appl.Anal.6(2000)149–157.

[6]A.Mukherjea,J.S.Ratti,.On a functional equation involving iterates of a bijection on the unit in–Terval，Nonlinear Anal.31 (1998)459–464.

[7]S.Nabeya.On the functional equation f(p+qx+rf(x))=a+bx+cf(x)，Aequationes M–ath.11(1974)199–211.

[8]J.Tabor,J.Tabor.On a linear iterative equation，Resuits Math.27(1995)412–421.

[9]赵立人.关于函数方程$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^2(x)=F(x)$解的存在唯一性定理[J].中国科技大学学报(数学专辑)，1998，21–27.

[10]张伟年.关于迭代方程$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$解存在性讨论[J].科学通报，1986，31(17)：1290–1295.

[11]张伟年.关于具有两端可微性的迭代根存在可能性的问题[J].数学季刊，1989，4(2)：31–38.

[12]张伟年.关于迭代方程$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$可微解的讨论[J].数学学报，1989，32(1)：98–109.

[13]W.Zhang.Discussion on the differentiable solutions of the iterative equation $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$, Nonlinear Anal.15 (1990) 387–398.

[14]D.Yang,W.Zhang.Characteristic solutions of the iterated equations，Aequationes Math.67(2004)80–105.

[15]W.Zhang, K.Nikodem,B.Xu,.Convex solutions of polynomial–like iterative equation, J.Math. A nal.Appl.315(2006)29–40.

[16]B.Xu,W.Zhang,.Decreasing solutions and convex solutions of the polynomial–like iterative equation,J.Math. A nal. Appl.2006：1–15.

# Non-monotonic Solutions of Polynomial-like Iterative Equation

XIN Bang–ying

*(Department of Mathematics and Physics，Xichang College，Xichang，Sichuan 615022)*

**Abstract:** This paper followed the first one continues to discuss the existence of continuous solutions of the polynomial–like iterative equation $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x)=F(x)$，without an assumption of monotonicity. Meantime，it discusses the uniqueness and stability.

**Key words:** Iterative equation；Monotonicity；Continuous solutions；Uniqueness；Stability