浅谈利用多元函数最优化的方法证明不等式

仓义玲,衡美芹
(宿迁学院,江苏 宿迁 223800)

【摘 要】本文通过举例利用多元函数的最优化的方法证明不等式。
【关键词】不等式;条件极值;拉格朗日乘数法;对偶性
【中图分类号】O178 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2009)04-0033-02

优化问题分为两种情况:(1)无约束的优化问题是指求某一多元函数在一给定有界闭区域上的最值;(2)有等式约束的多元函数的优化问题,通常又称为条件极值,它的求解原则是把它化为无约束的优化问题。而在不等式证明中,有很多不等式利用常规的方法,其过程显得繁琐且不容易证明。但是在不等式中,如果能适当的选择目标函数和相应的限制条件,应用多元函数最优化的方法来证明就显得简单易证了。下面通过一些例证来阐明利用多元函数最优化证明不等式的方法。

1 对任意实数x>0,y>0,z>0,证明不等式:

$xy^2z^3 \le 108(\frac{x+y+z}{6})^6$。

证法一:考察函数 $f(x,y,z)=xy^2z^3$ 在等式 $108(\frac{x+y+z}{6})^6=108a^6$ 即 $x+y+z=6a$ 约束条件下的最大值问题,其中a是正常数 $x>0,y>0,z>0$,用拉格朗日乘数法求解,构造辅助函数:

令 $F(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3+\lambda(x+y+z-6a)$

解方程组 $\begin{cases} F_x'=y^2z^3+\lambda=0 \\ F_y'=2xyz^2+\lambda=0 \\ F_z'=3xy^2z^2+\lambda=0 \\ F_\lambda'=x+y+z-6a=0 \end{cases}$

得唯一的驻点 $x_0=a,y_0=2a,z_0=3a$,

又由于 $f(x,y,z)=xy^2z^3$ 在题设条件下有最大值,即 $(a,2a,3a)$ 为其最大值点,于是有不等式

$f(x,y,z)=xy^2z^3 \le f(a,2a,3a)=108a^6=108(\frac{x+y+z}{6})^6$,

从而不等式得证。

证法二:证明题的不等式等价于求函数 $g(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y+z)$ 在 $xy^2z^3=108b^6$ 约束条件下的最小值问题,其中b是正常数,用拉格朗日乘数法求解,构造辅助函数:

令 $G(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{6}(x+y+z)+\mu(xy^2z^3-108b^6)$

解方程组 $\begin{cases} G_x'=\frac{1}{6}+\mu y^2z^3=0 \\ G_y'=\frac{1}{6}+2\mu xyz^3=0 \\ G_z'=\frac{1}{6}+3\mu xy^2z^2=0 \\ G_\mu'=x+y+z-108b^6=0 \end{cases}$

得唯一的驻点 $x_1=b,y_1=2b,z_1=3b$,

又由于 $g(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y+z)$ 在题设条件下有最小值,即 $(b,2b,3b)$ 为其最小值点,所以

$g(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y+z)\ge b=(\frac{xy^2z^3}{108})^{\frac{1}{6}}$,从而不等式得证。

注:证法一与证法二是互为对偶的思维方法,它是一种有效的证明方法。

2 设x>0,y>0,z>0,且 $x^3+y^3+z^3=16\sqrt{\frac{2}{3}}$,证明:$x^2+y^2+z^2\le 8$。

证明:考察函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在 $x^3+y^3+z^3-16\sqrt{\frac{2}{3}}=0$ 约束条件下的最大值问题,用拉格朗日乘数法求解,构造辅助函数:

令 $F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^3+y^3+z^3-16\sqrt{\frac{2}{3}})$

解方程组 $\begin{cases} F_x'=2x+3\lambda x^2=0 \\ F_y'=2y+3\lambda y^2=0 \\ F_z'=2z+3\lambda z^2=0 \\ F_\lambda'=x^3+y^3+z^3-16\sqrt{\frac{2}{3}}=0 \end{cases}$

得唯一的驻点 $x_0=y_0=z_0=\sqrt{\frac{8}{3}}$

又由于 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在题设条件下有最大值,即 $(\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{\frac{8}{3}})$ 为其最大值点,所以

$x^2+y^2+z^2\le 3(\sqrt{\frac{8}{3}})^3=8$,从而不等式得证。

注:上述证明的对偶问题是:求函数 $g(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ 在等式 $x^2+y^2+z^2=8$ 约束条件下的最小值,即

收稿日期:2009-10-17
作者简介:仓义玲(1978-),女,江苏宿迁人,硕士,讲师,研究方向:复分析。

设$x^2+y^2+z^2=8$证明$x^3+y^3+z^3\ge 16\sqrt{\frac{2}{3}}$。

3 证明不等式：$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，其中$x_i\ge 0,i=1,2,\cdots,n$。

证明：考察函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$在$x_1+x_2+\cdots+x_n=C$约束条件下的最大值问题，用拉格朗日乘数法求解，构造辅助函数：

令$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-C)$

解方程组$\begin{cases}F_{x_1}'=x_2\cdots x_n-\lambda=0\\F_{x_2}'=x_1x_3\cdots x_n-\lambda=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\F_{x_n}'=x_1x_2\cdots x_{n-1}-\lambda=0\\F_\lambda'=x_1+x_2+\cdots+x_n-C=0\end{cases}$

得唯一的驻点$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{C}{n}$

又由于函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$的连续性，它在集合$D:x_1\ge 0,x_2\ge 0,\cdots,x_n\ge 0,$

$x_1+x_2+\cdots+x_n=C$有最大值与最小值，并且在x_i中至少有一个为零时取得最小值，因而在$(\frac{C}{n},\frac{C}{n},\cdots,\frac{C}{n})$点$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$取得最大值$\frac{C}{n}$，

即$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{C}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，从而不等式得证。

4 设α，β为正数，并且满足$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，对任意的正数x，y，证明不等式$xy\le\frac{x^\alpha}{\alpha}+\frac{y^\beta}{\beta}$。

分析：利用条件极值方法可以证明不等式$f(x,y)\geqslant g(x,y)$，其思路是：对任意的常数C，求解条件极值问题$\min f(x,y)$，其中$g(x,y)=C$，如果$f(x,y)$在此条件下的最小值不小于C，则推出$f(x,y)\geqslant g(x,y)$。

证明：考察函数$f(x,y)=\frac{x^\alpha}{\alpha}+\frac{y^\beta}{\beta}$在条件$xy-C=0$的最小值，为此用拉格朗日乘数法求解，构造辅助函数：

令$F(x,y,\lambda)=\frac{x^\alpha}{\alpha}+\frac{y^\beta}{\beta}+\lambda(xy-C)$

解方程组$\begin{cases}F_x'=x^{\alpha-1}+\lambda y=0\\F_y'=y^{\beta-1}+\lambda x=0\\F_\lambda'=xy-C=0\end{cases}$

得唯一的驻点$x_0=C^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}},y_0=C^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$

此时$f(x_0,y_0)=\frac{1}{\alpha}C^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}+\frac{1}{\beta}C^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}=C^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}=C$

这里用到了$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$及$(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})^{-1}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$，因为C为正数，所以当$xy=C$时，$f(x,y)=\frac{x^\alpha}{\alpha}+\frac{y^\beta}{\beta}$最大值不存在，

故$f(x_0,y_0)=C$是$f(x,y)$在$xy=C$下的最小值，

因此$\frac{x^\alpha}{\alpha}+\frac{y^\beta}{\beta}\ge xy$，从而不等式得证。

综上所述，利用多元函数最优化的方法证明不等式，关键是选择适当的，目标函数和相应的限制条件，该种方法在证明多个变量的不等式时非常有效。

注释及参考文献：

[1]华东师范大学数学系编. 数学分析 [M]. 北京：高等教育出版社,1996.

[2]徐利治，王兴华.数学分析的方法与例题选讲[M].北京：高等教育出版社，1979.

[3]同济大学应用数学系.高等数学(第五版)[M].北京：高等教育出版社，2002.

On the Use of Multi-function Optimization Method to Prove Inequality

CANG Yi-ling, HENG Mei-qin

(Suqian College, Suqian, Jiangsu 223800)

Abstract: In this paper, some exampls are given to prove inequality by using multi-function optimization method.

Key words: Inequality; Conditional extremum; Lagrange multiplier method; Duality