第23卷第4期 西昌学院学报·自然科学版 Vol.23,NO.4
2009年12月 Journal of Xichang College·Natural Science Edition Dec.,2009

微分中值定理应用中辅助函数的构造方法

陈 华
（江苏无锡科技职业学院 基础部,江苏 无锡 214028）

【摘 要】本文着重介绍了使用微分中值定理时构造辅助函数的几种有效方法。

【关键词】构造;辅助函数;微分中值定理
【中图分类号】O174.4 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2009)04-0031-02

前言

构造辅助函数是高等数学证明中常采用的技巧,它起着化难为易、化未知为已知的桥梁沟通作用。在应用微分中值定理解决问题时,究竟选择什么函数,在什么区间上应用中值定理,是需要着重考虑的问题。利用中值定理证明问题时,通常需要构造一个辅助函数,因此构造适当的辅助函数就成了证明问题的关键,也往往是解题的困难所在。本文着重介绍了使用微分中值定理时构造辅助函数的几种有效方法。

1 分析逆推法

利用微分中值定理时,常常会用到逆推的方法从欲证结论入手,借助于逻辑关系制造出某个函数的改变量,再观察其对应的区间,即可有效的构造出所需的辅助函数。

例1 设函数f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,证明在(0,1)内存在一点ξ,使得$f(1)=f(0)+(e^{1-\xi}-e^{-\xi})f'(\xi)$。

分析:结论可变形为$f(1)-f(0)=(e^{1-\xi}-e^{-\xi})f'(\xi)=\frac{e-1}{e^{\xi}}f'(\xi)$,即为$\frac{f(1)-f(0)}{e-1}=\frac{f'(\xi)}{e^{\xi}}$,因此可构造辅助函数$g(x)=e^x$,对f(x)与g(x)在[0,1]上应用柯西中值定理即可证明结论。

证明:令$g(x)=e^x$,由题设知f(x)与g(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,由柯西中值定理得$\frac{f(1)-f(0)}{e-1}=\frac{f'(\xi)}{e^{\xi}}$,整理即得$f(1)=f(0)+(e^{1-\xi}-e^{-\xi})f'(\xi)$。

2 不定积分法

在一些问题中,单使用逆推法还不够,往往还要借助积分法来构造出符合题设要求且满足微分中值定理条件的辅助函数。具体方法是把欲证结论中的ξ换成x,将替换后的等式变形为易于积分的形式,再两边积分解出C,由此可构造出相应的辅助函数。

例2 设函数f(x)在[0,1]上二阶可导,且f(0)=f(1)=0,证明存在ξ∈(0,1),使得$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

分析:在结论中用x替换ξ,有$f''(x)=\frac{2f'(x)}{1-x}$,将其变形为易于积分的形式:$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2}{1-x}$,两边积分:$\int\frac{f''(x)}{f'(x)}dx=\int\frac{2}{1-x}dx$,即$\ln|f'(x)|=-2\ln|1-x|+\ln|C|$,解得$C=(1-x)^2f'(x)$。

证明:设辅助函数$F(x)=(1-x)^2f(x)$。因为f(x)在[0,1]上二阶可导,所以f(x)在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且f(0)=f(1)=0,故满足罗尔定理条件,所以存在η∈(0,1)使f'(η)=0。又在(η,1)内,$F'(\eta)=(1-\eta)^2f'(\eta)=0$,$F'(1)=(1-1)^2f'(1)=0$,F(x)满足罗尔定理条件,所以存在ξ∈(η,1),使$F''(\xi)=-2(1-\xi)f'(\xi)+(1-\xi)^2f''(\xi)=0$,即$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

3 常数k值法

在构造辅助函数时,若表达式关于端点处的函数值具有对称性,可以用常数k值法来构造辅助函数。具体方法是将结论变形,使常数部分分离出来并令其为k,恒等变形使等式一端为a与f(a)构成的代数式,另一端为b与f(b)构成的代数式,再将端点值改为变量x,所得表达式即为辅助函数。

例3 设a>0,b>0,试证存在ξ介于a、b之间,使得$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)$

分析:将结论变形为$\frac{ae^b-be^a}{a-b}=(1-\xi)e^{\xi}$,左边为常数,因此可令$k=\frac{ae^b-be^a}{a-b}$,即$k=\frac{\frac{e^b}{b}-\frac{e^a}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$,

则有$\frac{e^b}{b}-\frac{k}{b}=\frac{e^a}{a}-\frac{k}{a}$,令b=x可得辅助函数$F(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{k}{x}$。

证明:设$F(x)=\frac{e^x}{x}-\frac{k}{x}\left(k=\frac{ae^b-be^a}{a-b}\right)$,则F(a)=F(b),

收稿日期:2009-08-30
作者简介:陈 华(1981-),女,江苏江阴人,硕士,无锡科技职业学院基础部教师,主要从事高等数学、应用数学教学研究。

由罗尔定理,存在ξ介于a、b之间,

使得$F'(\xi)=\frac{\xi e^{\xi}-(e^{\xi}-k)}{\xi^2}=0$。即$(1-\xi)e^{\xi}=k=\frac{ae^b-be^a}{a-b}$,

从而得到$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)$。

4 乘积因子法

对于某些要证明的结论,往往出现函数的导数与函数之间关系的证明,直接构造辅助函数比较困难,将所证结论的两端都乘以或除以一个恒正或恒负的函数,证明结论往往不受影响,$e^{\lambda x}$(λ为常数)是常用的乘积因子。

例4 若函数f(x)在[a,b]上连续,在(a,b)内可导,且f(a)=f(b)=0,证明存在一点ξ∈(a,b),使得f'(ξ)=f(ξ)。

分析:e^x是个恒为正的因子,所证明等式或不等式的两端都乘以或除以这样一个因子,等式或不等式仍然成立,于是想到e^x是个理想的乘积因子。

证明:构造辅助函数$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,可验证F(x)在[a,b]上满足罗尔定理条件,故存在ξ∈(a,b),使得$F'(\xi)=\frac{f'(\xi)e^{\xi}-f(\xi)e^{\xi}}{e^{2\xi}}$,即f'(ξ)=f(ξ)。

5 几何直观法

对于一些只涉及一阶导数和几何意义比较明确的证题,可以通过几何图形来建立恰当的辅助函数。

例5 设函数f(x)在[0,1]上可导,且0<f(x)<1,对于任何x∈(0,1),都有f'(x)≠1,试证在(0,1)内有且仅有一点ξ,使得f(ξ)=ξ。

分析:由图1可看出,此题的几何意义是,连续函数y=f(x)的图形曲线必跨越y=x这条直线,而两者交点的横坐标ξ恰满足f(ξ)=ξ。进而,由图还可知道,对[0,1]上的同一自变量x,这两条曲线纵坐标之差f(x)−x可构成一个新的函数F(x),它满足F(0)>0,F(1)<0,因而符合零点定理的条件。

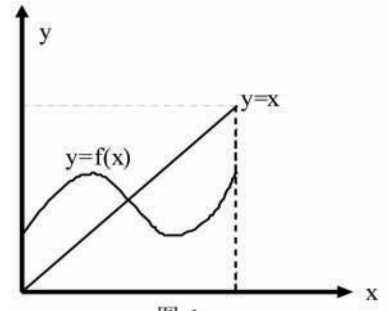

图1

证明:令F(x)=f(x)−x,则由题设知,F(x)在[0,1]上连续,且F(0)=f(0)>0,F(1)=f(1)−1<0。由零点定理知,至少存在一点ξ∈(0,1),使得F(ξ)=f(ξ)−ξ=0,即f(ξ)=ξ。

用反证法证明唯一性。设有两个点x_1,x_2∈(0,1)均有$f(x_1)=x_1$,$f(x_2)=x_2$,在x_1与x_2所构成的区间上运用拉格朗日中值定理有$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=1$,这与f'(x)≠1矛盾,故结论成立。

6 结语

从以上例子可以看出,与微分中值定理有关的证明问题都有一定难度,但是通过构造适当的辅助函数,问题便可迎刃而解。除了上述五种方法外,根据问题不同可能还有其他一些构造辅助函数的好方法,这些方法值得我们进一步研究。

注释及参考文献:

[1]同济大学等.高等数学(上册)[M].北京:高等教育出版社,2001:166−170.

[2]卢兴江等.高等数学竞赛教程[M].杭州:浙江大学出版社,2007:30−33.

[3]闵祥伟.高等数学学习指导与例题分析[M].北京:北京邮电大学大学出版社,2003:137−209.

Methods of Constructing Auxiliary Function in Applying Differential Mean Value Theorem

CHEN Hua

(*Wuxi Professional College of Science and Technology of Jiangsu, Wuxi, Jiangsu 214028*)

Abstract: This article mainly introduces some effective methods of constructing auxiliary functions in applying differential mean value theorem.

Key words: Construction; Auxiliary function; Differential mean value theorem