一类反应扩散方程解的熄灭

黄甬穗

（泉州经贸学院,福建 泉州 362000）

【摘　要】本文研究一类反映扩散方程的第一初边值问题,给出解在有限时间内熄灭(extinction)的充分条件。

【关键词】反应扩散方程;熄灭

【中图分类号】O175.2　【文献标识码】A　【文章编号】1673-1891(2009)04-0027-04

近些年来,反应扩散方程日益受到重视,它涉及物理、化学和生物等领域,有着强烈的实际背景和光明的应用前景。同时,由实际问题提炼出来的反应扩散方程模型,也对数学家们提出了许多具有挑战意义的课题,解决这些课题所跨出的每一步,都对数学理论的发展起到了积极的贡献和推动[1,2]。在众多的反应扩散方程研究课题中,本文主要关注一类反应扩散方程解的熄灭(extinction)现象。

考察如下反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=-\lambda u^{p}+u^{q},\ x\in\Omega,t>0 \tag{1}$$

的第一初边值问题

$$\begin{cases} u=0, & x\in\partial\Omega,t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega \end{cases} \tag{2}$$

其中,Ω是$R^n(n\geqslant 3)$中的有界区域,其边界$\partial\Omega\in C^2$,常数

$\lambda>0,0<p<1,0<q<1$,

初值$u_0(x)$满足$0\leqslant u_0(x)\in C^r(\overline{\Omega})(0<r<1)$,且在$\partial\Omega$上,$u_0(x)=0$。

由[3]知,问题(1)(2)存在唯一的局部解$u\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)\cap W_2^{2,1}(Q_T)$。

定义 设$u(x,t)$为问题(1)(2)的解,若存在$T_0\in(0,\infty)$,使当$t\geqslant T_0$时$u(x,t)\equiv 0$,则称解$u(x,t)$在有限时间内熄灭(extinction)。

反应扩散方程(1)的右边是反应项,可以粗略的指任方程右边的第一项是吸热项,第二项是放热项。顾永耕[7]指出,当第二项不出现时,解在有限时间内熄灭的充分必要条件是$p\in(0,1)$。杨世廞[8]研究了反应项既有吸热项、又有放热项的反应扩散方程的情形,认为其放热项是一个梯度项,在实际的应用中比较少见,问题(1)(2)曾在趋药学研究中作为数学模型导出[9]。在上述研究成果的基础上,本文试图将反应项中的第一项和第二项放在一起,考察这两项将如何相互作用,相互抑制？常数λ,p,q应满足什么条件时,解的熄灭才会发生？以下是本文的推导证明过程。

定理 存在正常数$q^*\in(0,1)$及λ_0,当$0<p<1,0<q<q^*$,且$\lambda\geqslant\lambda_0$时,问题(1)(2)的解必在有限时间内熄灭。

证 设$u(x,t)$为问题(1)(2)的解,方程(1)两边同乘以u^k($k\geqslant 1$为待定常数),并在Ω上积分之,得

$$\frac{1}{k+1}\frac{d}{dt}\|u\|_{k+1}^{k+1}+k\int_{\Omega}|u|^{k-1}|\nabla u|^2dx=-\lambda\|u\|_{k+p}^{k+p}+\int_{\Omega}|u|^{q+k}dx$$

整理得

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{k+1}^{k+1}+\frac{4k}{k+1}\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^2+(k+1)\lambda\|u\|_{k+p}^{k+p}=(k+1)\int_{\Omega}u^{q+k}dx \tag{3}$$

其中,$\|u\|_m=\|u(\cdot,t)\|_{L^m(\Omega)}$.

对于任意的$\varepsilon_1>0$,取$0<\alpha<2$,应用Young不等式,得

$$\int_{\Omega}|u|^{q+k}dx=\int_{\Omega}\left(u^{\frac{k+1}{2}}\right)^{\alpha}u^{q+k-\alpha\frac{k+1}{2}}dx\leq\varepsilon_1\int_{\Omega}u^{k+1}dx+C(\varepsilon)\int_{\Omega}u^{\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}}dx$$

若

$$0<\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}<k+1 \tag{4}$$

收稿日期:2009-10-30

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

作者简介:黄甬穗(1958-　),女,福建泉州人,讲师,主要从事数学分析研究和教学。

则有

$$\int_\Omega |u|^{\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}}dx = \|u\|_{\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}}^{\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}} \le C_1\|u\|_{k+1}^{\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}}$$

由Poincare不等式,有

$$\int_\Omega u^{k+1}dx = \left\|u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^2 \le C_2\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^2$$

故有

$$\int_\Omega u^{q+k}dx \le \varepsilon\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^2 + C(\varepsilon)\|u\|_{k+1}^{\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}} \tag{5}$$

其中, $\varepsilon = C_2\varepsilon_1$.

取 $\varepsilon = \frac{2k}{k+1}$,由(3)(5)得

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{k+1}^{k+1} + \frac{2k}{k+1}\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^2 + (k+1)\lambda\|u\|_{k+p}^{k+p} \le C_3\|u\|_{k+1}^{\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}} \tag{6}$$

另一方面,由Nirenberg-Gagliado不等式[3]知

$$\|u\|_{k+1}^{\frac{k+1}{2}} = \left\|u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2 \le C_4\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^{\sigma}\left\|u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_{\frac{2(k+p)}{k+1}}^{1-\sigma}$$
$$= C_4\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^{\sigma}\|u\|_{k+p}^{\frac{(1-\sigma)(k+1)}{2}}$$

其中, $0<\sigma=\frac{n(1-p)}{n(1-p)+2(k+p)}<1$　取θ >0,则有 $\|u\|_{k+1}^{\frac{\theta(k+1)}{2}} \le C_4\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^{\theta\sigma}\|u\|_{k+p}^{\frac{\theta(1-\sigma)(k+1)}{2}}$

若θ >0,满足

$$0<\theta\sigma<2 \tag{7}$$

$$\frac{\theta(1-\sigma)(k+1)}{2-\theta\sigma} = k+p \tag{8}$$

则对任意的δ >0,应用Young不等式,得

$$\|u\|_{k+1}^{\frac{\theta(k+1)}{2}} \le \delta\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^2 + C_5\delta^{-m}\|u\|_{k+p}^{k+p}$$

其中, $m=\frac{\theta\sigma}{2-\theta\sigma}>0$.

因此得

$$\|u\|_{k+p}^{k+p} \ge \frac{\delta^m}{C_5}\|u\|_{k+1}^{\frac{\theta(k+1)}{2}} + \frac{\delta^{m+1}}{C_5}\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^2$$

从而有　(9)

$$\lambda(k+1)\|u\|_{k+p}^{k+p} \ge \frac{\lambda(k+1)\delta^m}{C_5}\|u\|_{k+1}^{\frac{\theta(k+1)}{2}} - \frac{\lambda(k+1)\delta^{m+1}}{C_5}\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^2$$

取λ充分大,使

$$\lambda > \frac{C_5(C_3+1)^{m+1}(k+1)^{m-1}}{(2k)^m} \triangleq \lambda_0 \tag{10}$$

其中, C_3 为(6)中的常数,则有

取δ充分小,易知

$$\frac{\lambda(k+1)\delta^{m+1}}{C_5} < \frac{2k}{k+1},\ \frac{\lambda(k+1)\delta^m}{C_5} > C_3+1 \tag{11}$$

由此得

$$\lambda(k+1)\|u\|_{k+p}^{k+p} \ge (C_3+1)\|u\|_{k+1}^{\frac{\theta(k+1)}{2}} - \frac{2k}{k+1}\left\|\nabla u^{\frac{k+1}{2}}\right\|_2^2$$

代人(6),得

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{k+1}^{k+1} + (C_3+1)\|u\|_{k+1}^{\frac{\theta(k+1)}{2}} \le C_3\|u\|_{k+1}^{\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}} \tag{12}$$

取k,使

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\frac{\theta(k+1)}{2}=\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha} \tag{13}$$

易知,当$0<q<1$时有

$$0<\frac{\theta}{2}<1 \tag{14}$$

由(11)(12),得

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{k+1}^{k+1}\le-\|u\|_{k+1}^{\frac{\sigma(k+1)}{2}}$$

记 $y(t)=\|u(\cdot,t)\|_{k+1}^{k+1}$,则有

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}\le-y^{\frac{\sigma}{2}}\\ y(0)=\|u_0\|_{k+1}^{k+1}\end{cases}$$

从而得

$$\begin{cases}\|u(\cdot,t)\|_{k+1}\le\left[\|u_0\|_{k+1}^{\frac{(2-\theta)(k+1)}{2}}-C_6\left(1-\dfrac{\theta}{2}\right)t\right]^{\frac{2}{(2-\theta)(k+1)}}, & 0\le t<T_0\\ \|u(\cdot,t)\|_{k+1}=0, & t\ge T_0\end{cases} \tag{15}$$

其中,$T_0=2\|u_0\|_{k+1}^{\frac{(2-\theta)(k+1)}{2}}\cdot\left[C_6(2-\theta)\right]$,$C_6$为某正常数。

综上所述,若所选常数满足条件(4)(7)(8)(13),则当$\lambda>\lambda_0$,即满足(10)时,问题(1)(2)的解必在有限时间内熄灭,从而定理得证,并且得到估计式。

让我们考察如下由(4)(7)(8)(13)组成的关系式:

由于$0<\frac{\theta}{2}<1$,而$0<\sigma=\frac{n(1-p)}{n(1-p)+2(k+p)}<1$,显然有$0<\theta\sigma<\theta<2$,故条件(7)成立。同时,只要条件(13)成立,则有

$$0<\frac{2(q+k)-\alpha(k+1)}{2-\alpha}=\frac{\theta(k+1)}{2}<k+1$$

从而条件(4)成立。故只要能选到$k(k\geqslant1)$,使条件(8)(13)成立就行。

由(8)解得$\theta=\frac{2(k+p)}{k+1+p-\sigma}$,代人(13),整理得

$$(\alpha-2q)k^2+\left[n(1-p)(1-q)+p\alpha+2p+2q+\alpha-4pq\right]k+\left[2p^2+p\alpha+2pq(1-p)+n(1-p)(p+2q-pq)\right]=0 \tag{15}$$

记上述方程为$ak^2+bk+c=0$,并记其判别式为$\Delta=b^2-4ac$.

因$0<p<1,0<q<1$,故$b>0,c>0$。若取α,使$0<2q<\alpha<2$,则有$\alpha<0$,从而$\Delta>0$,方程(15)有两个不等实根,且因$\frac{c}{a}<0$,由韦达定理,这两根中必有一个为正根。显然,此正根$k=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$。

此时有

$$k\ge1\Leftrightarrow\sqrt{\Delta}\ge-b-2a$$

易证,当且仅当

$$q\le\frac{n+p(2+\alpha-n)+3\alpha}{4p+n(1-p)+2}\triangleq q_0 \tag{16}$$

时,有$-b-2a\leqslant0$,从而$\sqrt{\Delta}>0\ge-b-2a$由此即得$k\geqslant1$。因此定理的证明归结为证明上述常数q_0满足$0<q_0<1$。

显然$q_0>0$,而

$$q_0<1\Leftrightarrow\alpha<\frac{2(p+1)}{p+3}$$

由于$0<2q<\alpha<2$,故只要

$$0<q<\frac{p+1}{p+3}$$

就可取到α,使$0<2q<\alpha<\frac{2(p+1)}{p+3}<2$,从而$0<q_0<1$。

综上,取$q^*=\max\left(q_0,\frac{p+1}{p+3}\right)$,当$0<p<1,0<q<q^*$,且$\lambda\geqslant\lambda_0$时,问题(1)(2)的解必在有限时间内熄灭,其中$\lambda_0$如(10)所示,而$q_0$如(16)所示。至此,定理得证。

(C)1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

注释及参考文献：

[1]叶其孝,李正元.反应扩散方程引论[M].北京:科学出版社,1990.

[2]伍卓群,赵俊宁,尹景学,等.非线性扩散方程[M].长春:吉林大学出版社,1996.

[3]O.A.Ladyzenskaja, V.A.Solonikov, N.N.Ural'ceva, Linear and qusilinear equations of parabolic type, Amer.Math.Soc., Providence,R.I.,1968.

[4]M.A.Herrero and J.J.L.Velazquez,Approaching an extinction point in one-dimensioanal semilinear heat equations with strong absoption,J.Math.Anal.Appl.,170,353-381(1992).

[5]V.A.Galaktionov and J.L.Vazquez, Extinction for a quasilinear heat equation with absorption Ⅰ., Technique of intersection comparison,Comm.In PDE,19(7&8),1075-1106(1994).

[6]V.A.Galaktionov and J.L.Vazquez, Extinction for a quasilinear heat equation with absorption Ⅱ, A dynamical systems approach,Comm.In PDE,19(7&8),1107-1137(1994).

[7]顾永耕.抛物型方程的解熄灭(extinction)的充要条件[J].数学学报,1993(37):73-79.

[8]杨世廞.带梯度项半线性热方程解的耗竭[J].厦门大学学报(自然科学版),1996(35):672.

[9]Lin C S,Ni W M,Takagi I.Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system[J].J Diff Eqns,1988,72(1):1-27.

Extinction of Solutions for A Class of Reaction-Diffusion Equations

HUANG Yong-sui

(Quanzhou Economic and Trade College, Quanzhou, Fujian 362000)

Abstract: The first initial-boundary value problem of a class of semilinear heat equations is studied. A sufficient condition is given, under which the solutions will have a finite extinction time.

Key words: Reaction-Diffusion equation; Extinction

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net