关于无理数e概念教学之拓展性研究

吴耀强
(宿迁学院 教师教育系,江苏 宿迁 223800)

【摘 要】本文对于在科学技术中占有重要地位的无理数e作了较为完备的拓展性研究,不仅介绍数e产生的三个主要因素,并且给出e的无理性简洁证明以及其它方面的应用

【关键词】常数;无理性;超越性
【中图分类号】O122 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2009)03-0053-03

1 引言

第五世纪的一位著名的pythagorasi派学者philolaus曾说过:“如果没有数和数的性质,世界上任何事物本身或其与别的事物的关系都不能为人所清楚了解”[1]。的确,数在初等数学与高等数学中无处不在,甚至有些数极为重要,譬如大家熟悉的0与1,还有其它更加重要的常数,如π,i,ω,e,人们习惯分别称它们为圆周率、虚数单位、黄金分割数、纳皮尔常数。关于前三者的论述文章颇多,e却是唯一一个不为古人所知的一个常数。它随着科技发展越来越多地出现在微积分、概率统计等学科中;它是在今天的银行业中对银行家最有帮助的一个数,此外在考古学的碳-14定年法、古画的铅-210或镭-226鉴定法中也有所涉及,甚至在法国著名昆虫学家法布尔的《昆虫记》一书第九卷中有这样的描述:“当一条悬链弯曲成两点不在同一垂直线上的曲线时,人们便把这曲线称为悬链线。这就是一条软绳子两端抓住而垂下来的形状;这就是一张被风吹鼓起来的船帆外形的那条线条,这就是母山羊奎拉下来的乳房装满后鼓起来的弧线。而这一切都需要e这个数”、“…… 现在,这个奇妙的数e又出现了,就写在蜘蛛丝上。在一个浓雾弥漫的清晨,让我们检视一下夜间刚刚织好的网吧。粘性的蜘蛛丝,负着水滴的重量,弯曲成一条条悬链线,水滴随著曲线的弯曲排成精致的念珠,整整齐齐,晶莹剔透。当阳光穿过雾气,整张带着念珠的网映出彩虹般的亮光,就像一丛灿烂的宝石。e这个数是多么的辉煌!”

目前,初等数学教材以及理工科相关教材中对于e通常作如下定义:“在科学技术中常常使用无理数e,它的前十位小数是2.7182818284…,以其为底的对数叫做自然对数,为了简便,N的自然对数$\log_e N$记为lnN,以e为底的指数函数e^x和自然对数函数lnX在高等数学中占有重要地位”[2]。此时,有人不禁要问:常数e到底是怎样的一个数呢?其值是如何而来的?在十进制的系统里,用这样奇怪的数为底,难道会比以10为底的常用对数更自然吗?

2 推动e产生的三个问题

2.1 复利问题

所谓复利,民间俗称“利滚利”,就是先得到利息后,可以把利息并进本金再生利息。但是本金与利息的总和(以下简称本利和)的多少与计息周期有关,显然计息周期缩小,在相同时期内本利和在加大。那么,复利会随着计息间隔的无限缩小时,本利和会膨胀到无限大吗?事实上,设本金P以年利率r计息,一年以复利计息n次,总共计算t年,如果让n无限制的加大,t年后的总额$S_n=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$,那么n无限大时,$S_n$应该趋于一个稳定值,这是从实际观察而来,而不是严密的数学结果,这个结果着实让十七世纪的数学家大吃一惊,因为那时还没有极限概念,那么,这个稳定值是多少呢?

2.2 几何问题

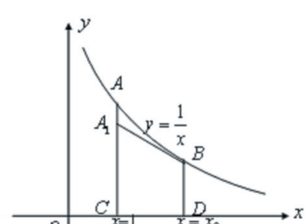

图1 双曲线$y=\frac{1}{x}$

在一个直角坐标系中,如图1所示画出双曲线$y=\frac{1}{x}$的图形,那么以这条曲线、x轴、直线x=1以及直线$x=x_0$所围成的封闭图形的面积为1时x_0取何值?事实上,我们可以探讨四边形(梯形)ABCD面积来逼近x_0的取值,由图可知,$AC=1,BD=\frac{1}{x_0},CD=x_0-1$,这样便有下式$\frac{1}{2}(AC+BD)\times CD=1$,整理即得$x_0{}^2-2x_0-1=0$,于

收稿日期:2009-06-08
作者简介:吴耀强(1973-),男,江苏宿迁人,讲师,硕士,主要从事数学教学研究。

是解得 $x_0=1+\sqrt{2}=2.4142\cdots$，这样，$x_0$的取值应该大于上述值。同样做法，我们还可以探讨梯形A_1B_1CD面积来逼近x_0的取值，这里A_1为曲线$y=\frac{1}{x}$在B点处切线与线段AC之交点，通过计算可得$x_0=2+\sqrt{3}=3.732\cdots$，因此$x_0$的取值应该小于此值，那么$x_0$的真值为多少呢？

2.3 对数问题

恩格斯曾评价“对数与解析几何、微积分为十七世纪三大数学发明”。对数是由苏格兰数学家纳皮尔为了简化天文学问题中球面三角计算问题而发明的，并于1614年在其著作《论述对数的奇迹》一文中将乘除法运算转化为简单的加减法运算。然而，为了方便计算对数值，必须编制一个对数表，当然首先想到用10为底，但是这样编制出来的lgN取值很小时，N就很大了。于是就面临选择一个适当的底数使真数N的取值间隔尽可能的小。经过多年的探索，纳皮尔发现底数取值接近1时可以基本达到这样的效果，编制出来的对数表就非常精确实用。于是最后选定$1.000001^{1000000}=\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000}$为底数。当然，我们现在已经知道这一结果与e非常接近，至此应该可以明了“自然”含义的渊源。

3 符号e的出现

随着对于复利等问题研究的不断深入，人们越来越意识到此类问题都和一个极限值有关。1683年瑞士数学家雅各布·贝努利提出此数值就是$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$当n→∞时的极限，但是伯努利只估计这个极限值在2与3之间。大家都知道，数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是一个首项为2的递增数列，在开始的时候增长速度较快，但是n大于100以后，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的值的增长就很慢了。瑞士数学家欧拉用级数$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$首次用笔计算到小数点后23位，其结果为2.71828182845904523536028…。随后，欧拉定义$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的值为e，并于1728年在其一篇未发表的手稿《遗作》中这样表述“这个数的对数是1，以e命名之，它的值为2.71828…”。至于欧拉为什么用字母e来表示自然对数的底，有人认为e来自他自己名字的首字母；也有人认为e来自于指数英文的首字母；还有人认为e是第二个元音字母，因为欧拉在其著作中已经使用了第一个元音字母a。无论什么理由，符号e首次公开出现是在1731年欧拉写给哥德巴赫的一封信中。

4 e的本质研究

对于e的本质研究，大致可以分为如下两个层次。一是关于e是否是两个整数之比即是有理数还是无理数，1737年欧拉给出了e和e^2是无理数的证明，此外，欧拉和拉格朗日在柏林学院的一位同事Johann.Heinrich Lambert也给出如果x为有理数（不是0），则e^x不能为有理数（或e^x对正整数x是无理数）的结论。在现行的高等教材中，一般使用反证法，利用微积分中无穷级数理论给出严密证明，这里我们提供形式较简单的证明过程：

假设e是有理数，即$e=\frac{p}{q}$，其中p，q都是大于1的正整数，由于

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{(q+1)!}+\cdots,$$

于是 $\frac{p}{q}-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots-\frac{1}{q!}=\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots$，

对上式两边同时乘以q!，显然等式右侧为一个整数，右边整理并记，

$$R(q)=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots$$

这样，$R(q)>0$，且

$$R(q)<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+2)(q+3)}+\cdots$$

$$=\frac{1}{q+1}+\left(\frac{1}{q+1}-\frac{1}{q+2}\right)+\left(\frac{1}{q+2}-\frac{1}{q-3}\right)+\cdots<1,$$

故矛盾，从而e是无理数。

此外，第二个层次是需要进一步探讨e是否是某个整系数代数方程的根即是代数还是超越数的问题，1873年查尔斯·赫米特给出了e是超越数的证明，其证明详见文[3]。

5 e的广泛应用

正如philolaus所言“你不仅可以在鬼神的事务上，而且在人间的一切行动和思想上乃至一切行业和音乐上看到数的力量”。无理数e的出现，对于数学学科而言，除了自然指数函数、自然对数函数、双曲函数的相关应用之外，与e有关的研究与结果极为丰富，如欧拉公式的复数形式$e^{i\pi}+1=0$被人们称为人类最宝贵财富之一，这一公式巧妙地把纳皮尔常数、虚数单位、圆周率、以及0与1联系在一起，真可谓鬼斧神工、巧妙之至！这一点恰好成为古希腊亚历山大时期新柏拉图主义派领军人物普洛克努斯的名言“那里有数，那里有美”的绝佳映照。此外，其它自然科学的发展也会处处可见与无理数e有关的痕迹，如物体的冷却、细胞的分裂、细菌的繁殖、放射性元素的衰变等。正因为如此，科学才成为吸引人们进行不懈探索的精神动力，从而显示人类不断进化的本质力量。尽管如此，人们也发现e与其

它重要常数之间一些尚未发现的"神秘"关系，如e在π的结果中，第13位数同是9，第17位数同是2，第18位同是3，第21位同是6，第34位又同是2，人们甚至猜测每隔10位数就会出现一个数相同。还有人猜测在π的数字中必有e的前n位数字，在e的数字中必有π的前n位数字[4]。由此，我们可否大胆猜测包括e在内的几个著名常数的其它美妙事实可能还被深埋在尚未发现的数学知识之中。

注释及参考文献：

[1]M·克莱因.古今数学思想[M].上海：上海科学技术出版社，1979.

[2]华东师范大学数学系编.数学分析[M].北京：高等教育出版社，1981.

[3]闵鹤嗣，严士健.初等数论[M].北京：人民教育出版社，1982.

[4]张楚廷. 数学文化[M]. 北京:高等教育出版社,2000.

Research and Exploration on Concept Teaching of the Irrational Number e

WU Yao-qiang

(*Department of Teachers Education, Suqian College, Suqian, Jiangsu 223800*)

Abstract: We made the development of more comprehensive studies of the irrational number e, which plays an important role in the science and technology. In this paper, we introduced the three main factors to affect the origin of the irrational number e, and simply proved it's rational and transcendence, and finally we gave other applications.

Key words: Constant; Irrational; Transcendence

（上接52页）

[2]Kon.Meijerhof(海波罗公司).影响孵化器通风的关键因素：温度、湿度、二氧化碳[J].中国家禽，2009(2)：43-44.

[3]段有伟.鸡卵孵化管理技术探讨[J].中国家禽，2009(2)：83-84.

[4]王晓霞.家禽孵化手册[M].北京：中国农业大学出版社，1998：74-75.

[5]马世强.影响蛋鸡孵化成绩的因素分析[J].中国家禽，2009(1)：81-82.

Measures to Increase Egg Hatching Rate

FEI Lei

(*Animal Science Department, Xichang College, Xichang, Sichuan 615013*)

Abstract: This paper put forward some corresponding measures to increase egg hatching rate through hatching preparation, egg selection, hatching environmental control, hatching operational techniques and so on.

Key words: Eggs; Hatching rate; Measures