广义逆矩阵表达式及计算

张礼平[1],喻惠波[2]
(1.西昌学院,四川 西昌 615022;2.四川省凉山州劳动职业技术学校,四川 西昌 615000)

【摘 要】本文主要从矩阵的初等变换分解式中给出满足一个条件的广义逆矩阵的一般表达形式,并用Excel的数组公式来具体计算一个给定矩阵A的广义逆矩阵,简介广义逆矩阵在解线性方程组方面的应用。

【关键词】广义逆矩阵;数组公式;线性方程组
【中图分类号】O151.21 【文献标识码】A 【文章编号】1673-1891(2008)02-0039-04

讨论广义逆矩阵及其应用的文章、书籍[1-4]很多,得到的结果也很丰富,本文从另一方式讨论它的表达式,用Excel来具体计算一个给定矩阵A的广义逆矩阵

1 广义逆矩阵的一般表达形式:

设$A\in R^{m\times n}$,若存在$G\in R^{n\times m}$,满足以下四个等式:

①$AGA=A$ ②$GAG=G$

③$(AG)^T=AG$ ④$(GA)^T=GA$

中的一部分或全部,则称G为矩阵A的一个广义逆矩阵。按此定义,广义逆矩阵的种类很多,满足四个等式中的一个、两个、三个或全部的广义逆矩阵依次有 $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4$类,为方便我们用A{1}为满足条件①的所有广义逆矩阵构成的集合,用A{1,4}为满足条件①④的所有广义逆矩阵构成的集合,其他类似。

1.1 满足第一个等式AGA=A的广义逆矩阵G,不唯一。

对于某一固定的广义逆,记作A^-,称为矩阵A的一个减号逆。对于任意矩阵A,减号逆A^-总存在,它的求法也很多,下面介绍一种新的求法。

对于$A\in R^{m\times n}$,由代数知识知道,$A\in R^{m\times n}$,∃$P\in R^{m\times n}$,$Q\in R^{m\times n}$,P、Q可逆,使$A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}Q$,其中$R(A)=r$,P、Q的具体计算方法,本文在后面给出。为了使AGA=A,且根据分块矩阵乘法分块要求,可设$G=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^{-1}$,其中$X_1\in F^{r\times r}$,$AGA=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$Q\,Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}X_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$$,解得$X_1=E_r$。

故取$G=A^-=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^{-1}$,$X_2$、$X_3$、$X_4$任意。

1.2 满足第二个等式GAG=G的广义逆矩阵G,

为了使GAG=G,且根据分块矩阵乘法分块要求,仍可设$G=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^{-1}$,其中$X_1\in F^{r\times r}$,$GAG=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^{-1}$

$$P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$$

$$Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^{-1}=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1^2 & X_1X_2\\ X_3X_1 & X_3X_2\end{pmatrix}P^{-1}$$

$=G=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^{-1}$,解得$X_1^2=X_1$,$X_2$是$(X_1-E_r)X=0$的$r\times(m-r)$阶矩阵解,$X_3$是$X(X_1-E_r)=0$的$(n-r)\times r$阶矩阵解,$X_4=X_3X_2$。

故取$G=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_3X_2\end{pmatrix}P^{-1}$,其中$X_1$是任意r阶幂等阵,$X_2$是满足$(X_1-E_r)X=0$的任意$r\times(m-r)$阶矩阵,$X_3$是满足$X(X_1-E_r)=0$的任意$(n-r)\times r$阶矩阵。特别地可取一类特殊的$G=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_3X_2\end{pmatrix}P^{-1}$,$X_2$、$X_3$任意。

1.3 满足第三个等式$(AG)^T=AG$的广义逆矩阵G,

为了使$(AG)^T=AG$,且根据分块矩阵乘法分块要求,可设$G=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^T$,其中$X_1\in R^{r\times r}$。$AG=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$Q\,Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^T$$

$$=P\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^T=(AG)^T$$

$$=P\begin{pmatrix}X_1^T & 0\\ X_2^T & 0\end{pmatrix}P^T$$。解得$X_2=0$,$X_1^T=X_1$。

故取$G=Q^{-1}\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}P^T$,其中$X_1$是对称矩阵,$X_3$、$X_4$任意。

1.4 满足第四个等式$(GA)^T=GA$的广义逆矩阵G,

为了使$(GA)^T=GA$,且根据分块矩阵乘法分块要求,可

收稿日期:2008-04-20
作者简介:张礼平(1965-),男,副教授,主要从事代数、模糊数学等研究。

设G= $Q^{-1}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}P^T$ ，其中$X_1 \in R^{r\times r}$。

$$GA= Q^{-1}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}P^T P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$$

$$=Q^T\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & 0 \end{pmatrix}Q=(GA)^T$$

$$=Q^T\begin{pmatrix} X_1^T & X_3^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$$ 。解得$X_3=0$，$X_1^T=X_1$。

故取G=$Q^T\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}P^{-1}$，其中$X_1$是对称矩阵，$X_2$、$X_4$任意。

由上面广义逆矩阵的表达式知，广义逆运算与转置运算运算次序可以交换。

上面关于矩阵A的分解是用A=P$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$Q 的初等变换的思想，我们也可用矩阵的正交分解A=$H\begin{pmatrix} B_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}K$，其中H、K分别是m、n阶正交矩阵，$B_r$是r阶非奇异数量阵来考虑。但如具体计算$A^-$时，需要算出H、K，而H、K的计算比P、Q的计算要困难得多。

2 广义逆矩阵的应用及固定形式与一般形式关系

广义逆矩阵的一个应用在解线性方程组[1,3,4]方面，有下面一些重要结论。

2.1 应用

2.1.1 对于齐次线性方程组AX=0，通解X=(En−A^-A)K，K∈R^n；

2.1.2 如一般线性方程组AX=b有解，则通解X=A^-b+(En−A^-A)K，K∈R^n，也可表达为X=Gb，其中G∈A{1}。

此时方程组解不唯一，我们可以进一步求得范数‖X‖最小的解，称此时的X为方程组的极小范数解，解唯一。要使解X=Gb的范数最小，G还要满足条件④$(GA)^T$=GA，即G∈A{1，4}，此时称G为矩阵A的极小范数逆，矩阵A的某一极小范数逆记为A^-_m。

A^-_m的表达式可由1.1、1.4推出，但易验算$A^T(AA^T)^-$∈A{1，4}，故可令$A^-_m=A^T(AA^T)^-$。

2.1.3 如一般线性方程组AX=b无解，则我们求‖AX−b‖^{2}极小的X，称为AX=b的最小二乘解，最小二乘解满足方程$A^TAX=A^Tb$，故X=$(A^TA)-A^Tb$，令G=$(A^TA)^-A^T$，验算G=$(A^TA)^-A^T$∈A{1，3}，称为矩阵A的最小二乘逆，记为A^-_l。

2.1.4 AX=b的最小二乘解X=A^-_lb，注意到AX=AA^-_lb一定有解，故它的极小范数解为X=$A^-_mAA^-_l$b，X=$A^-_mAA^-_l$b称为AX=b的极小最小二乘解。验算G=$A^-_mAA^-_l$∈A{1,2,3,4}，记为A^+，称为矩阵A的加号逆。它对于任意矩阵A都存在，而且是唯一的。

2.2 固定形式与一般形式关系

2.2.1 A^-∈A{1}是某一固定广义逆，∀G∈A{1}，则G可由A^-表示：G=A^-+V(E_m−AA^-)+(E_n−A^-A)W，其中∀V、W∈$R^{n\times m}$。因为易得AGA=A，取V=G−A^-，W=GAA^-，A^-+V(E_m−AA^-)+(E_n−A^-A)W= A^-+

$$(G-A^-)(E_m-AA^-)+(E_n-A^-A)(GAA^-)=G$$

2.2.2 A^-_m∈A{1，4}是某一固定极小范数逆，∀G∈A{1,4}，则G可由A^-_m表示：G=A^-_m+Z(E_m−AA^-_m)，其中∀Z∈$R^{n\times m}$。因为易得AGA=A，

GA=(A^-_m+Z(E_m−AA^-_m))A=A^-_mA，故$(GA)^T=(A^-_mA)^T$=A^-_mA=GA，所以∀G∈A{1,4}，且取Z=G−A^-_m，则

A^-_m+Z(E_m−AA^-_m)=A^-_m+(G−A^-_m)(E_m−AA^-_m)=A^-_m+G−GAA^-_m−A^-_m+$A^-_mAA^-_m$

=G−GAA^-_m+$A^-_mAA^-_m$

=G−$A^-_mAA^-_m$+$A^-_mAA^-_m$=G

2.2.3 A^-_l∈A{1，3}是某一固定最小二乘逆，∀G∈A{1,3}，则G可由A^-_l表示：G=A^-_l+(E_n−A^-_lA)Z，其中∀Z∈$R^{n\times m}$。因为易得AGA=A，

AG=A(A^-_l+(E_n−A^-_lA)Z)=AA^-_l，故$(AG)^T=(AA^-_l)^T$=AA^-_l=AG，所以∀G∈A{1,3}，且取Z=G−A^-_l，则

A^-_l+(E_n−A^-_lA)Z=A^-_l+(E_n−A^-_lA)(G−A^-_l)=A^-_l+G−A^-_l−A^-_lAG+$A^-_lAA^-_l$

=G−A^-_lAG+$A^-_lAA^-_l$

=G−$A^-_lAA^-_l$+$A^-_lAA^-_l$=G

3 计算

对于一个线性方程组，在求它的一般解、极小范数解、最小二乘解时，如分别计算A^-、A_m^-、A^-_l，上面虽然给出了从A^-来计算A_m^-、A^-_l的公式，但计算量很大，我们可以计算加号逆A^+，对于加号逆A^+，有下面结果：如A=PQ是A的满秩分解，其中P=$P_{m\times r}$，Q=$Q_{r\times n}$，R(A)=R(P)=R(Q)=r，则$A^+=Q^T(QQ^T)^{-1}(P^TP)^{-1}P^T$，公式看起来虽然复杂，但如果我们利用Excel来计算就十分方便了。

例 求线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0 \end{cases}$通解，并求它的最小范数解。

解：将线性方程组的系数矩阵A输入Excel，并令相应区域为A，由代数知识知对矩阵作行列变换，相当于对矩阵左右乘相应矩阵。利用Excel的矩阵乘的数组公式MMULT，从A的结构和计算过程可得矩阵α1、α2、α3、β1、β2(如图1)，最后输入数组公式{=MMULT(α3,MMULT(MMULT α2,MMULT(MMULT(α1,A),β1)),β2)}

MMULT　=MMULT(α2,MMULT(γ1,β2))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		1	1	-3	-1		1	0	0		1	-1	3	1
2	A	3	-1	-3	4	α1	-3	1	0	β1	0	1	0	0
3		1	5	-9	-8		-1	0	1		0	0	1	0
4											0	0	0	1
5		1	0	0	0		1	0	0		1	0	0	0
6	γ1	0	-4	6	7	α2	0	1	0	β2	0	1	3/2	7/4
7		0	4	-6	-7		0	1	1		0	0	1	0
8											0	0	0	1
9		1	0	0	0		1	0	0					
10	γ2	0	-4	0	0	α3	0	-1/4	0					
11		·)	0	0	0		0	0	1					
12		1	0	0	0									
13	γ3	0	1	0	0									
14		0	0	0	0									

图 1

即　α3α2α1Aβ1β2=γ3 故

A=($\alpha_3\alpha_2\alpha_1$)−1 γ3 ($\beta_1\beta_2$)$^{-1}$。输入{=MINVERSE(MMULT(α3,MMULT(α2, α1)))}

得S=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$。输入

{=MINVERSE(MMULT(β1，β2))}得

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -3/2 & -7/4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

MMULT　=MINVERSE(MMULT(α3,MMULT(α2,α1)))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		1	1	-3	-1	1		1	0	0		1	-1	3	1	
2	A	3	-1	-3	4	4	α1	-3	1	0	β1	0	1	0	0	
3		1	5	-9	-8	0		-1	0	1		0	0	1	0	
4						b						0	0	0	1	
5		1	0	0				1	0	0		1	0	0	0	
6	α2	0	1	0			α3	0	-1/4	0	β2	0	1	3/2	7/4	
7		0	1	1				0	0	1		0	0	1	0	
8												0	0	0	1	
9		1	0	))								1	1	-3	-1	Q
10	S	3	-4	0							T		1	-3/2	-7/4	
11		1	4	1								0	0	1	0	
12		P										0	0	0	1	

图 2

即得A的分解式

$$A=S\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -4\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -3/2 & -7/4\end{pmatrix}$$

$\triangleq PQ$（见图2）

输入数组公式（见图3）：

{=MMULT(MMULT(MMULT(TRANSPOSE(Q),MINVERSE(MMULT(Q,TRANSPOSE(Q)))),MINVERSE(MMULT(TRANSPOSE(P),P))),TRANSPOSE(P))}

MMULT　=MMULT(MMULT(MMULT(TRANSPOSE(Q),MINVERSE(MMULT(Q,TRANSPOSE(Q)))),MINVERSE(MMULT(TRANSPOSE(P),P))),TRANSPOSE(P))

A	B	C									
	1	0	0		1		1	1	-3	-1	Q
S	3	-4	0	b	4	T	0	1	-3/2	-7/4	
	1	4	1		0		0	0	1	0	
	P						0	0	0	1	
	8/371	61/742	3/742		130/371			270/371	15/371	129/371	-102/371
A^+	4/3339	-155/6678	187/6678	A^+b	- 34/371	E_n-A^+A		15/371	310/371	69/371	118/371
	- 38/1113	-197/2226	-107/2226		-144/371			129/371	69/371	74/371	- 24/371
	OSE(P))	683/6678	-307/6678		157/371			-102/371	118/371	- 24/371	88/371

图 3

$$得A^+=\begin{pmatrix}8/371 & 61/742 & 3/742\\ 4/3339 & -155/6678 & 187/6678\\ -38/1113 & -197/2226 & -107/2226\\ 47/3339 & 683/6678 & -307/6678\end{pmatrix}$$

方程组的一个特解

$X_0=A^+b=\frac{1}{371}\begin{pmatrix}130\\ -34\\ -144\\ 157\end{pmatrix}$（见图3），也是最小范数解。通解 X=

$$A^+b+(E_n-A^+A)K=\frac{1}{371}\begin{pmatrix}130\\ -34\\ -144\\ 157\end{pmatrix}+\frac{1}{371}\begin{pmatrix}270 & 15 & 129 & -102\\ 15 & 310 & 69 & 118\\ 129 & 69 & 74 & -24\\ -102 & 118 & -24 & 88\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\\ k_4\end{pmatrix}$$

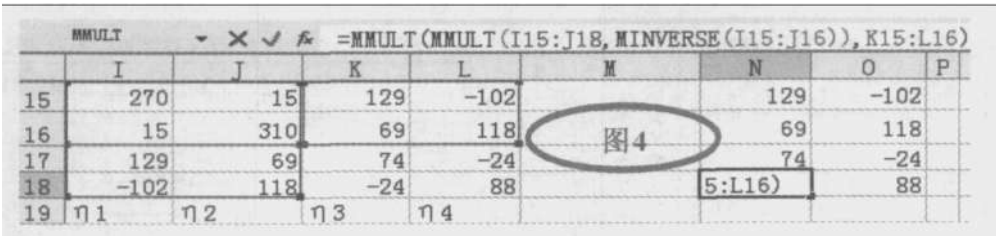
$$=\frac{1}{371}\begin{pmatrix}130\\ -34\\ -144\\ 157\end{pmatrix}+\frac{k_1}{371}\begin{pmatrix}270\\ 15\\ 129\\ -102\end{pmatrix}+\frac{k_2}{371}\begin{pmatrix}15\\ 310\\ 69\\ 118\end{pmatrix}+\frac{k_3}{371}\begin{pmatrix}129\\ 69\\ 74\\ -24\end{pmatrix}+\frac{k_4}{371}\begin{pmatrix}-102\\ 118\\ -24\\ 88\end{pmatrix}$$

$\triangleq \eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3+k_4\eta_4$，

注意到

$(\eta_1\quad\eta_2)\begin{pmatrix}270 & 15\\ 15 & 310\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}129 & -102\\ 69 & 118\end{pmatrix}$

$=(\eta_3\quad\eta_4)$（见图4）。故知秩{η_1、η_2、η_3、η_4}=2。故通解可进一步简化表示为：X=$\eta_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$。


MMULT =MMULT(MMULT(I15:J18,MINVERSE(I15:J16)),K15:L16)

	I	J	K	L	M	N	O	P
15	270	15	129	-102		129	-102	
16	15	310	69	118	图4	69	118	
17	129	69	74	-24		74	-24	
18	-102	118	-24	88		5:L16)	88	
19	η1	η2	η3	η4				

注释及参考文献：

[1]尹钊. 线性方程组的广义逆矩阵解法[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报，1999，15(5)：21-25.

[2]刘晓冀. 环上矩阵的Moore-Penrose逆[J]. 数学研究与评论. 2003，23(4):728-730.

[3]北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编.高等代数[M].北京:高等教育出版社，2003.

[4]谢邦杰.线性代数[M].北京:人民教育出版社，1978.

The Expression and Calculation of Generalized Inverse Matrix

ZHANG Li-ping[1]，YU Hui-bo[2]

(1.Xichang College，Xichang，Sichuan 615022；
2.Liangshan Labour Vocational School in Sichuan，Xichang，Sichuan 615000)

Abstract: This paper mainly from matrix elementary transformation' expression gives out a generalized inverse matrix that satisfies a condition，and calculates a generalized inverse matrix of given matrix A specifically with the array formula of Excel，and introduces briefly the application of the generalized inverse matrix in the aspect of linear equation group.

Key words: Generalized inverse matrix；Array formula；Linear equation group

（上接29页）

(Animal Science Department，Xichang College，Xichang，Sichuan 615013)

Abstract: The technologies about three-aged-stopping heat supplication brooding are the important links on the ecological feedings of Liangshan Yanying chickens. We summarized on the related technologies of the brooding Liangshan Yanying chickens，such as the building of broodhouse，transportations and epidemic preventions of chickens，drinking waters and starting eating foods，reasonable density，controlling the cultivate environment and so on.

Key words: Yanying chickens of Liangshan；Three-aged；Stopping heat supplication brooding；Related technologies